

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

**Л.А. Назаренко**

# **ФІЗИЧНІ ОСНОВИ ДЖЕРЕЛ СВІТЛА**

**Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний  
посібник для студентів вищих технічних навчальних закладів**

**ХАРКІВ – 2009**

**Назаренко Л.А. Фізичні основи джерел світла:** Навчальний посібник. – Харків: ХНАМГ, 2009. - 206 с.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих технічних навчальних закладів, лист № 1.4/18-Г-2864 від 24.12.08

У навчальному посібнику викладені фізичні основи джерел світла, а саме основних теоретичних і експериментальних даних, що складають фізичний фундамент сучасних світлотехнічних пристроїв. Розглянуті якісні і кількісні закономірності, що визначають фізику процесів у теплових, напівпровідникових (світлодіодних) газорозрядних джерелах світла. Посібник дасть можливість студентам зрозуміти принципи роботи джерел світла, а також опанувати професію світлотехніка для створення нових приладів і пристроїв.

Важливе місце в посібнику займають розділи, присвячені викладенню основ квантової механіки, фізики твердого тіла. Це пов'язано з всезростаючою роллю світлодіодів на ринку освітлення.

Посібник призначений для студентів вищих технічних навчальних закладів, які вивчають фізичні основи джерел світла та фізичні основи електронної техніки.

Іл. - 53, Табл. - 5, Бібл. назв. - 22

**Рецензенти:** доктор фізико – математичних наук, професор, начальник лабораторії ННЦ “ХФТГ” **В.І. Карась**;  
доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної радіофізики Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна **М.М. Колчигін**;  
доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри оптоелектроніки Харківського національного університету радіоелектроніки **Ю.П. Мачехін**.

**ISBN: 966 – 695 – 118 - 5**

© Харківська національна академія  
міського господарства,  
© Л.А. Назаренко 2009

## Зміст

Вступ.....	6
1. Закони теплового випромінювання.....	9
1.1 Теплове випромінювання.....	9
1.2. Закон Кірхгофа.....	11
1.3. Закон Стефана – Больцмана.....	18
1.4. Закон зміщення Віна.....	19
1.5. Формула випромінювання Планка.....	20
1.6. Лампи розжарювання.....	24
Список літератури.....	27
Питання для самоперевірки.....	28
2. Основні положення квантової механіки.....	29
2.1. Корпускулярно-хвильовий дуалізм.....	29
2.2. Хвильова функція.....	37
2.3. Принцип суперпозиції.....	42
2.4. Співвідношення невизначеності.....	45
2.5. Принцип причинності у квантовій механіці.....	50
2.6. Хвильове рівняння Шредінгера.....	53
2.7. Частинка в одновимірній прямокутній потенційній ямі....	57
2.8. Частинка у тривимірній прямокутній потенційній ямі...	61
2.9. Квантово - механічний осцилятор.....	63
2.10. Воднеподібний атом.....	66
Список літератури.....	72
Питання для самоперевірки.....	72
3. Зонна теорія твердих тіл.....	73
3.1. Колективізація електронів в кристалі.....	73
3.2. Зонний характер енергетичного спектра електронів у кристалі. Адіабатичне і одноелектронне наближення.....	75

3.3. Наближення сильнозв'язаних електронів.....	78
3.4. Наближення вільних електронів.....	80
3.5. Наближення слабозв'язаних електронів.....	81
3.6. Модель Кроніга – Пенні.....	83
3.7. Зони Бриллюена.....	87
3.8. Приведені зони.....	88
3.9. Ефективна маса електрона.....	90
3.10. Заповнення зон електронами і електричні властивості твердих тіл.....	94
3.11. Поняття про дірки.....	97
3.12. Домішкові рівні в напівпровідниках.....	99
3.13. Донорні рівні.....	99
3.14. Акцепторні рівні.....	102
3.15. Рівні прилипання.....	103
3.16. Глибокі домішкові рівні.....	104
3.17. Світлодіоди.....	105
Список літератури.....	111
Питання для самоперевірки.....	112
4. Електронна емісія.....	113
4.1. Фотоелектронна емісія.....	116
4.2. Термоелектронна емісія металів.....	120
Список літератури.....	123
Питання для самоперевірки.....	124
5. Люмінесценція.....	125
5.1. Кристалофосфори.....	130
5.2. Фотолюмінісценція.....	133
5.3. Вихід люмінесценції.....	136
5.4. Закон Вавілова.....	137
5.5. Світловий потік фотолюмінісценції.....	139

5.6. Катодолюмінісценція люмінофора.....	140
5.7. Гасіння люмінесценції.....	141
5.8. Люмінесцентні лампи.....	143
Список літератури.....	148
Питання для самоперевірки.....	148
6. Газорозрядні процеси.....	150
6.1. Частота іонізації і коефіцієнт Таунсенда.....	151
6.2. Ефективні перерізи.....	153
6.3. Рекомбінація зарядів.....	160
6.4. Несамостійний розряд.....	162
6.5. Перехід несамостійного розряду в самостійний.....	166
6.6. Типи газових розрядів.....	173
6.7.Тліючий розряд.....	174
6.8. Самостійний дуговий розряд.....	180
6.9. Несамостійний дуговий розряд.....	182
6.10. Плазма газового розряду.....	183
6.11. Випромінювання плазми.....	187
6.12. Іскровий розряд.....	189
6.13. Коронний розряд.....	191
6.14. Високочастотний розряд.....	195
6.15. Сірчана лампа.....	201
Список літератури.....	204
Питання для самоперевірки.....	205

«Якщо 20<sup>е</sup> сторіччя пройшло під знаком електрона, то сьогодні ми стоїмо перед епохою фотона»

(книга „Оптичні технології 21–сторіччя”)

## **Вступ**

Сучасне людство неможливе без повсюдного використання світла. Освітлювальні установки створюють необхідні умови освітлення, які забезпечують зорові відчуття (бачення), що дає блтзько 90% інформації, яку одержує людина від оточуючого світу.

Світло створює нормальні умови для роботи й навчання, поліпшує нам побут.

Без штучного світла не може обійтися сучасне місто, неможливі будівництво, сільськогосподарські роботи, а також робота транспорту в нічний час.

Оптичне випромінювання все в більшій мірі використовується в сучасних технологічних процесах у промисловості й сільському господарстві для знезаражування приміщень і води, стає невід’ємною частиною фототехнічних виробництв, відіграє все зростаючу роль у підвищенні продуктивності тваринництва і птахівництва, врожайності.

Ефективне використання світла за допомогою досягнень сучасної світлотехніки - дуже важливий резерв підвищення продуктивності праці і якості продукції, зниження травматизму і збереження здоров’я.

У загальному бюджеті енергетичних витрат значна складова належить освітленню. За аналізом Міжнародного енергетичного агенства енерговитрати на освітлення складають 19 %. Тому актуальним є створення освітлювальних технологій, що забезпечують не тільки високу якість освітлення, але й збереження енергії і зменшення викидів CO<sub>2</sub>.

У наш час на ринку присутні енергозберігаючі лампи, які не тільки економлять енергію, але й вартість їх зменшує, і їх вплив на навколишнє середовище значно кращий, ніж лампи розжарювання.

Нові світлотехнічні продукти пропонують і мають якість світла, і значну економію вартості для споживачів і бізнесу.

Компанія «Philips» запатентувала універсальну технологію, яка веде до значної економії для галогенних ламп. Вона технологія використовується в новому ряді компактних галогенних ламп, названих Edore, які економлять 50 % споживаної енергії в порівнянні із звичайними лампами розжарювання і забезпечують високу якість світла.

В останні роки особливе значення мають роботи по створенню виробництва металогалогенних ламп, натрієвих ламп високого тиску і компактних люмінесцентних ламп, безелектродних високочастотних і надвисокочастотних ламп, світлодіодів, які відкривають нові перспективи високоякісного освітлення і ефективного використання енергії.

Історичні віхи розвитку електричних джерел світла:

1802р. – Вугільна дуга Петрова, свічіння тліючого розряду в дослідах Петрова.

1840р. - Німецький фізик Грове використовує для підігріву нитки розжарювання електричний струм.

1872р. – Винайдена перша вугільна лампа розжарювання Лодигінім.

1876р. – Винахід Яблочковим свічки, що складається двох паралельних стрижнів.

1878р. – Едісон у США запропонував лампу з платиновою проволокою.

1908-1910рр. – Початок випуску перших ламп розжарювання з вольфрамовим тілом, (General Electric, Philips).

1923р. - Лосєв вперше помітив явище електролюмінесценції кристалів («свічіння Лосєва»).

1940р. – Заявка Фабриканта на відкриття вимушеного випромінювання.

1958р. – Перші галогенні лампи (General Electric, Osram, Philips).

1964р. - Нобелівська премія Н.Г. Басову, А.М. Прохорову і Ч. Таунсу за фундаментальні дослідження в області квантової електроніки.

1978р. – Створення перших компактних люмінесцентних ламп (Philips).

1991р. – Безелектродні надвисокочастотні ЛЛ типу QL з робочою частотою 2,65 МГц і терміном служби 60 мис. год.

1997р. – Безелектродні індукційні ЛЛ типу Endura (Osram).

Метою цього посібника є систематизоване викладання фізичних основ джерел світла, тобто розгляд основних теоретичних і експериментальних даних, що складають фізичний фундамент цих приладів. Розглядаються якісні й кількісні закономірності, що визначають фізику процесів у теплових, напівпровідникових (світлодіодних), газорозрядних джерелах світла. Адже, щоб добре розуміти принципи роботи джерел світла, а тим більше створювати нові прилади і пристрої, необхідно знати складні фізичні процеси, що відбуваються в них.

Важливе місце в курсі займають розділи, присвячені викладенню основ квантової механіки, фізики твердого тіла. Це пов'язано з все зростаючою роллю світлодіодів на ринку освітлення.

Скрізь, де це можливо, окрім строгих математичних співвідношень, які найбільш точно виражають суть розглядуваних закономірностей, автор прагнути викласти те, що називається фізикою явища, тобто дати якісну фізичну картину процесу.



# **1. ЗАКОНИ ТЕПЛОВОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ**

## **1.1. Теплове випромінювання**

Електромагнітне випромінювання всіх довжин хвиль зумовлено коливанням електричних зарядів, які входять до складу речовини, тобто електронів і іонів. При цьому коливання іонів, що складають речовину, відповідають випромінюванню низької частоти (інфрачервоному) внаслідок значної маси зарядів, що коливаються. Випромінювання, що виникає в результаті руху електронів, може мати високу частоту (видиме і ультрафіолетове випромінювання), якщо електрони входять до складу атомів й молекул і, таким чином, утримуються біля свого положення рівноваги значними силами. У металах, де багато вільних електронів, випромінювання останніх відповідають іншому типу руху; в цьому випадку неможливо говорити про коливання біля положення рівноваги; вільні електрони, приведені в рух, мають нерегулярне гальмування, їх випромінювання має характер імпульсів, тобто вони характеризуються спектром різних довжин хвиль, серед яких можуть бути достатньо представлені й хвилі низької частоти. Випромінювання тіла супроводжується втратою енергії. Для того щоб забезпечити можливість тривалого випромінювання енергії, необхідно поповнювати її втрати, в протилежному разі випромінювання буде супроводжуватись змінами в середині тіла і стан випромінюючої системи буде безперервно змінюватися. Вказані процеси можуть бути різнобічними і, як наслідок, може бути різним і характер свічення.

Можна заставити тіло світитися, даючи йому необхідну енергію нагріванням. У цьому разі можна підтримувати випромінювання незмінним, якщо втрата енергії, що виноситься випромінюванням, поповнюється відповідною кількістю теплоти. Цей вид свічення найбільше розповсюджений і називається тепловим випромінюванням. Власне кажучи, таке теплове випромінювання має місце і при низьких температурах (наприклад при

кімнатній), але в цих умовах випромінювання практично обмежуються лише дуже довгими інфрачервоними хвилями.

Теплове випромінювання тіл можна протиставити всім іншим видам випромінювання в наслідок особливостей, уявлення про які дає наступне міркування:

Вважатимемо, що випромінююче тіло оточує ідеально відбиваюча непрониклива для випромінювання оболонка. Тоді випромінювання не розсіюється по всьому простору, а відбивається повністю стінками, зберігається в межах порожнини, падаючи знову на випромінююче тіло і в більший або менший мірі знову ним поглинається. У таких умовах ніякої втрати енергії система – випромінююче тіло і випромінювання – не відчуває. Проте це ще не значить, що випромінююче тіло і випромінювання знаходяться в рівновазі між собою. Енергія системи міститься частково у вигляді енергії випромінювання (електромагнітних хвиль), частково у вигляді внутрішньої енергії випромінюючого тіла. Стан системи буде рівноважним, якщо з часом розподіл енергії між тілом і випромінюванням не змінюється. Помістимо в середину порожнини нагріте тіло. Якщо в одиницю часу тіло більше випромінює, ніж поглинає (або навпаки), то температура його буде знижуватися (або збільшуватися). При цьому буде ослаблюватися або посилюватися випромінювання, доки нарешті не встановиться рівновага. Такий рівноважний стан стійкий. Після будь-якого його порушення, в наслідок описаного механізму, знову відновиться рівноважний стан.

Теплове або рівноважне випромінювання підкоряється певним загальним закономірностям, які витіпливають з принципів термодинаміки, внаслідок яких встановлена теплова рівновага ізолюваної системи не може бути порушена через випромінювання будь-якими частинами даної системи або будь-які інші теплові обміни. Теплове випромінювання ще називають температурним.

Основна величина, яка характеризує тепловий стан тіла, є його температура. Ця величина є визначальною також в явищах теплового

випромінювання, що можна побачити з наступного досліду. Нагріваючи будь-яку тугоплавку речовину (вугілля, титан), ми помічаємо, що видиме (темно - червоне) свічення з'являється тільки при певній температурі (близько  $500^{\circ}\text{C}$ ). У міру підвищення температури свічення стає яскравішим і збагачується більш короткими хвилями, переходячи приблизно при  $1500^{\circ}\text{C}$  в яскраве біле розжарення. Контролюючи свічення спектроскопом, ми можемо бачити, як міру підвищення температури поступово розвивається суцільний спектр свічення, починаючи від вузької області червоного випромінювання ( $\lambda=700,0$  нм) і переходячи поступово в повний видимий спектр. Спостерігаючи свічення за допомогою термоелемента, можна виявити і інфрачервоне і ультрафіолетове випромінювання нагріваного тіла.

У цих дослідах виявляється і одна дуже важлива риса температурного випромінювання. Спектральний склад випромінювання, що відповідає даній температурі, для різних добре поглинаючих речовин (наприклад, окислів металів, вугілля і т.і.н) практично однаковий, але для прозорих тіл випромінювання може мати помітні відміни і склад. Так, нагріваючи шматок сталі при температурі близько  $800^{\circ}\text{C}$  побачимо яскраве вишнево червоне розжарення, тоді як прозорий стрижень плавленого кварцу при тій же температурі зовсім не світиться, не випромінює видимих (зокрема червоних) променів. Таким чином, виявляється більша здатність до випромінювання тіл, що добре поглинають. Ця обставина визначає умови обміну променистої енергії, які ведуть до встановлення теплової рівноваги між тілами.

## **1.2. Закон Кірхгофа**

Для характеристики теплового випромінювання ми скористаємося величиною потоку енергії  $\Phi$ , тобто кількістю енергії, випромінюваної в одиницю часу (потужності випромінювання).

Потік з одиниці поверхні випромінюючого тіла за всіма напрямками будемо називати *випромінюючою здатністю* і позначати через  $E$ .

Визначена таким чином випромінююча здатність відповідає світимості і називається енергетичною світимістю. Поряд з нею можна розглядати і енергетичну яскравість  $V$ . Для чорного тіла яскравість не залежить від напрямку, так що  $E = \pi V$ .

Теплове випромінювання займає більш широку спектральну область. І оскільки випромінююча здатність тіла залежить від довжини хвилі (частоти), то для її характеристики ми повинні встановити, до якої спектральної ділянки відноситься наші визначення.

Вважаємо, що спектральна ділянка знаходиться між частотами  $\nu$  і  $\nu + \Delta\nu$ . Чим менше  $\Delta\nu$ , тим детальніше буде охарактеризоване випромінювальна здатність тіла (рис.1.1).

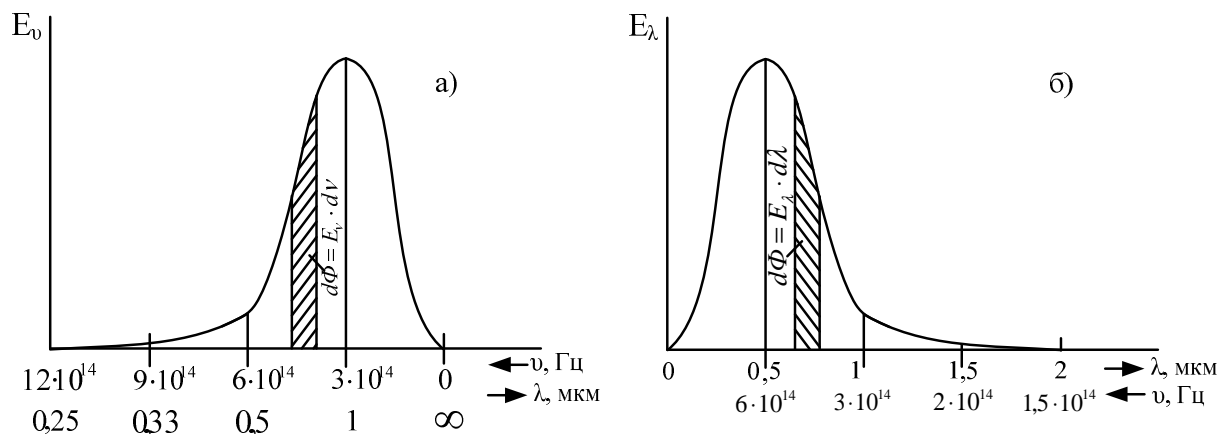


Рис. 1.1 - Спектральна залежність випромінюючої здатності чорного тіла при  $T = 2500\text{K}$ : а – залежність  $E_\nu$  від  $\nu$ , виражена в рівномірній шкалі частот; б - залежність  $E_\lambda$  від  $\lambda$ , виражена в рівномірній шкалі довжин хвиль. Площа заштрихованої ділянки дає потік  $d\Phi = E_\lambda \cdot d\lambda = E_\nu \cdot d\nu$ , що припадає на інтервал частот  $d\nu$  чи відповідний інтервал довжин хвиль  $d\lambda$ .

Разом з тим кількість енергії, що відноситься до вузького інтервалу, пропорційна його ширині  $\Delta\nu$ , що створює межу звужуванню спектрального інтервалу.

Таким чином, величина світлового потоку  $\Delta\Phi$  даного спектрального

інтервалу пов'язана з шириною цього інтервалу  $\Delta\nu$  співвідношенням  $\Delta\Phi = E_\nu \Delta\nu$ , де  $E_\nu$  - коефіцієнт, що характеризує випромінюючу здатність тіла для частоти  $\nu$ .

Ми звичайно можемо представити випромінюючу здатність не у функції частоти  $\nu$ , а у функції довжини хвилі  $\lambda$ , тобто побудувати графік не  $E_\nu$ , а  $E_\lambda$  (рис.1.1, б).

Виділяючи кожного разу площадку, яка дає величину одного й того ж світлового потоку  $\Delta\Phi$ , що приходить на інтервал частот  $\Delta\nu$  або  $\Delta\lambda$ , знайдемо  $\Delta\Phi = E_\nu \Delta\nu = E_\lambda \Delta\lambda$ , тобто  $E_\nu = E_\lambda \frac{\Delta\lambda}{\Delta\nu}$ .

Оскільки  $\lambda\nu = c$  ( $c$  - швидкість світла), то  $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\nu} = -\frac{c}{\nu^2} = -\frac{\lambda^2}{c}$ .

Таким чином,  $E_\lambda = E_\nu \frac{\lambda^2}{c}$ , тобто при переході від кривої  $E_\nu$  до  $E_\lambda$  вид кривої трансформується, зокрема положення максимуму на тій або іншій кривій відповідає різним частотам (довжинам хвиль).

Дослід показує, що  $E_\nu$  (рівно як і  $E_\lambda$ ) значною мірою залежить від температури випромінюючого тіла, так що випромінююча здатність  $E_{\nu,T}$  є функцією частоти і температури.

Отже, випромінюючу здатність тіла  $E_{\nu,T}$  можна визначити за вимірюванням потоку енергії, який посилає в одиниця поверхні тіла у всі сторони, відповідно співвідношенню

$$d\Phi = E_{\nu,T} d\nu. \quad (1.1)$$

Знаючи випромінювання тіла в кожній спектральній ділянці, можна легко обчислити сумарні випромінювання інтегруванням:

$$E_T = \int d\Phi = \int_0^\infty E_{\nu,T} d\nu. \quad (1.2)$$

Разом з тим якщо на одиницю поверхні тіла падає світловий потік  $d\Phi$ , то частина цього потоку  $d\Phi'$  буде поглинатися тілом.

**Поглинаючою здатністю** тіла  $A$  називається відношення поглинаючого потоку  $d\Phi'$  до падаючого  $d\Phi$ , тобто  $A = \frac{d\Phi'}{d\Phi}$ .

Зрозуміло, що в даному разі мається на увазі потік у вузькому спектральному інтервалі  $\Delta\nu$  (квазімонохроматичний), оскільки поглинальна здатність тіла також залежить і від довжини хвилі. Дослід також свідчить, що  $A$  залежить і від температури, таким чином поглинальна здатність є функцією частоти і температури тіла.  $A_{\nu,T}$  за визначенням є завжди правильним дробом, і максимальне значення  $A_{\nu,T}$  є одиницею.

Кірхгоф назвав тіла, для яких  $A_{\nu,T}=1$ , для всіх частот і температур **абсолютно чорними**. Сажа, як і платинове чорніння, наближається за своїми якостями до абсолютно чорного тіла.

Закон Кірхгофа торкається співвідношення між  $A_{\nu,T}$  і  $E_{\nu,T}$ , і формулюється так:

*Відношення між випромінюючою і поглинальною здатністю тіла не залежить від природи тіла, тобто  $\frac{E_{\nu,T}}{A_{\nu,T}}$  є універсальна для всіх тіл функція частоти і температури, тоді як  $E_{\nu,T}$  і  $A_{\nu,T}$ , взяті окремо, можуть змінюватися надзвичайно сильно при переході від одного тіла до другого.*

Позначивши для абсолютно чорного тіла випромінюючу здатність через  $\varepsilon_{\nu,T}$ , а поглинальну здатність – через  $\alpha_{\nu,T}$ , можна написати закон Кірхгофа у вигляді

$$\frac{E_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} = \frac{\varepsilon_{\nu,T}}{\alpha_{\nu,T}} = \varepsilon_{\nu,T}, \quad (1.3)$$

оскільки  $\alpha_{\nu,T}=1$ .

Таким чином, універсальна функція Кірхгофа є не що інше, як випромінююча здатність абсолютно чорного тіла.

Закон Кірхгофа має загальне значення незалежно від механізму поглинання і всяка дуже поглинаюча система буде і дуже випромінювати, незалежно від того, зумовлене поглинання якостями поверхні або системи як

цілого. Так, щітка із сталевих полірованих голок, розташованих як показано на рис. 1.2, буде дуже поглинати світло, тому що промінь, який попадає між голками, багаторазово відбивається від різних голок, перш ніж зможе вийти зовні.

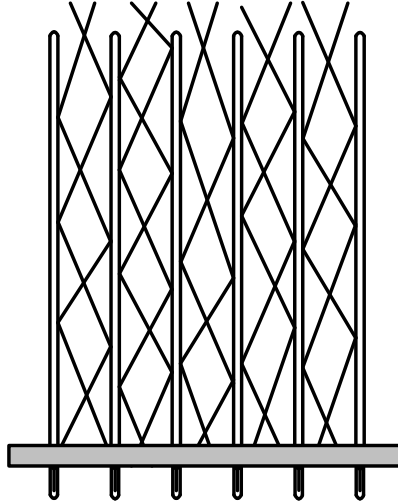


Рис. 1.2 - Щітка з полірованих голок в наслідок багаторазового відбиття має велике поглинання і здатність до випромінювання.

Таким чином, хоча поглинання поверхнею полірованої голки невелике, загальне поглинання системи буде значне, оскільки відбувається для кожного променя багаторазово. При нагріванні така система відповідно до закону Кірхгофа буде і дуже випромінювати, причому і тут механізм значного випромінювання пов'язаний з тим, що кожна ділянка поверхні голки не тільки безпосередньо випромінює, але й відбиває зовні численні промені, що випромінюються іншими ділянками.

На такому ж принципі заснована будова тіла, що найбільше наближаючогося за своїми характеристиками до абсолютно чорного. Воно виготовляється у вигляді майже замкнутої порожнини (рис.1.3) з малим отвором, діаметр якого не більше  $1/10$  діаметра порожнини, так що отвір видно із стінок під тілесним кутом, не більшим  $0,01$  ср.

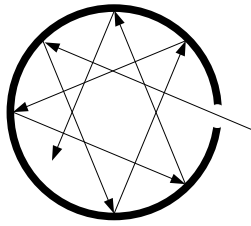


Рис 1.3 - Абсолютно чорне тіло.

Випромінювання, яке проникає через отвір, падає на стінки порожнини, частково поглинається ними, частково розсіюється або відбивається і знову попадає на стінки. Внаслідок малих розмірів отворів промінь повинен багаторазово здійснити відбивання і розсіяння, перш ніж він зможе вийти з отвору назад зовні.

Повторні поглинання на стінках приводять до того, що практично все світло будь-якої частоти поглинається такою порожниною.

Поглиналина здатність добре виконаного чорного тіла описаного пристрою практично не відрізняється від одиниці для будь-якої довжини хвилі. Відповідно до закону Кірхгофа і випромінююча здатність його дуже близька до  $\varepsilon_{\nu,T}$ , де  $T$  означає температуру стінок порожнини. У всіх дослідженнях з абсолютно чорним тілом користується саме описаним пристроєм, значно переважаючим за своїми характеристиками поверхню, покриту платиновим чорнінням або сажею. Необхідно разом з ним відмітити, що високі поглинаючі властивості цих матеріалів частково пояснюються їх пористістю, особливо для сажі, завдяки чому світло, яке попадає в них, здійснює декілька відбивань, перш ніж одержує можливість вийти з товщі матеріалу. Таким чином, чорнота сажі особливо підвищується завдяки її пористості. Цим же пояснюється насичений колір оксамиту або взагалі тканин з довгим ворсом; насичений кольор знамен, драпіровок з глибокими складками.

Нечорними тілами на протигагу чорним називають тіла з поглинальною здатністю  $A_{\nu,T}$  меншою одиниці. До цієї категорії відносяться практично всі тіла від сажі, коефіцієнт поглинання якої близький до 0,99 і



кінчаючи добре полірованими металами, для яких коефіцієнт поглинання не перевищує кількох процентів.

Відповідно до основного співвідношення Кірхгофа  $E_{\nu,T} = \varepsilon_{\nu,T} A_{\nu,T}$

Таким чином, для нечорних тіл  $E_{\nu,T} < \varepsilon_{\nu,T}$ , тому що  $A_{\nu,T} < 1$ . Це значить, що для будь-якої довжини хвилі випромінююча здатність нечорного тіла не може бути більше випромінюючої здатності чорного тіла при однаковій температурі. Саме вид функції  $E_{\nu,T}$  може відрізнитися від функції  $\varepsilon_{\nu,T}$  внаслідок того, що поглинальна здатність  $A_{\nu,T}$  залежить від  $\nu$ , тобто має вибірковий (селективний) хід.

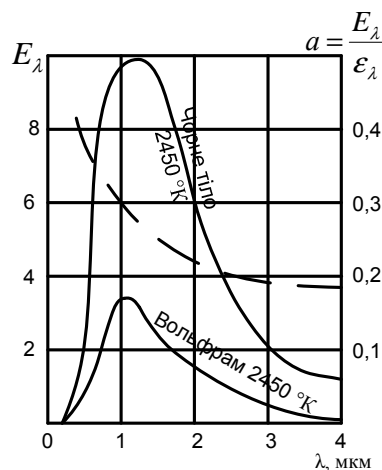


Рис. 1.4 - Випромінююча здатність чорного тіла і вольфраму при температурі 2450K (пунктирна крива дає відношення  $a = \frac{E_\lambda}{\varepsilon_\lambda}$  і показує, що відносно випромінювання вольфраму росте із зменшенням довжини хвилі (селективність випромінювання вольфраму)).

Відповідно до цього і випромінювання нечорного тіла може мати селективний характер. Прикладом такої практично важливої селективно випромінюючої речовини є вольфрам. На рис. 1.4 показані залежності випромінюючої здатності вольфраму  $E_\lambda$  при  $T=2450K$  від довжини хвилі. Для порівняння там же наведена крива залежності  $\varepsilon_\lambda$  від  $\lambda$  при тій же температурі для чорного тіла. Пунктирна крива показує відношення ординат обох кривих  $\frac{E_\lambda}{\varepsilon_\lambda}$ .

Із ходу пунктирної кривої видно, по-перше, що випромінювання вольфраму для всіх довжин хвиль менше ніж випромінювання чорного тіла ( $E_\lambda < \varepsilon_\lambda$ ) і, по-друге, що вольфрам має помітне селективне випромінювання у видимій частині спектру (відношення  $a = \frac{E_\lambda}{\varepsilon_\lambda}$  швидко зростає із зменшенням  $\lambda$ ). Остання обставина робить вольфрам зручним матеріалом для освітлювальних ламп розжарювання.

### 1.3. Закон Стефана – Больцмана

Закон Кірхгофа  $\frac{E_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} = \varepsilon_{\nu,T}$  ставить у центр уваги теорії теплового випромінювання функцію  $\varepsilon_{\nu,T} = f(\nu, T)$ , що являє, собою випромінюючу здатність чорного тіла. Визначення виду цієї функції було основним завданням вчення про температурне випромінювання. Вирішення цього завдання було одержано не зразу. Спочатку був встановлений закон, який визначає сумарне випромінювання чорного тіла (закон Стефана-Больцмана), потім були визначені деякі основні риси функції (закон Віна), потім вдалось знайти остаточне теоретичне вирішення задачі (Планк, 1900 р.). Слід відмітити, що воно було знайдене тільки шляхом рішучої зміни основних положень фізики, шляхом створення теорії квантів, яка заклала принципово нову базу фізичної науки.

Першим етапом, як вже було сказано, було знаходження закону, який встановлював залежність сумарного або інтегрального випромінювання від температури. Стефан (1873р.) на основі власних вимірювань прийшов до висновку, що сумарна енергія, випромінювання з  $1\text{см}^2$  протягом 1с, пропорційна четвертій степені абсолютної температури випромінювача. У 1884р. Больцман, виходячи з термодинамічних міркувань і з думки про існування тиску променистої енергії, пропорційному її густині, теоретично

показав, що сумарне випромінювання абсолютно чорного тіла повинно бути пропорційне четвертій степені температури, тобто

$$\varepsilon_T = \int_0^{\infty} \varepsilon_{vT} dv = \sigma T^4, \quad (1.4)$$

де  $\sigma$  – стала. Точні вимірювання дозволили підтвердити закон Больцмана і визначити сталу  $\sigma$  цього закону. За сучасними вимірюваннями  $\sigma = 6.67 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/см}^2 \cdot \text{град}^4$ .

#### 1.4. Закон зміщення Віна

Закон Стефана - Больцмана відноситься лише до інтенсивності інтегрального випромінювання чорного тіла і нічого не говорить про спектральний розподіл енергії.

У 1893р. Він теоретично вивів закон чорного випромінювання, який вказує на характер функції  $\varepsilon = f(v, T)$ , хоч і не повністю визначив її. Він розглядав термодинамічний процес стиску випромінювання, яке знаходиться в середині ідеально дзеркальної посудини, при зменшенні об'єму останньої і беручи до уваги зміну частоти випромінювання, яке відбивається від рухомого дзеркала (принцип Доплера), дійшов до висновку, що випромінююча здатність чорного тіла має вигляд

$$\varepsilon_{vT} = c v^3 f(v/T), \quad (1.5)$$

де  $c$  – швидкість світла у вакуумі, а  $f$  - функція, для визначення виду якої розвинені Віном міркування були недостатніми.

Важливий результат, досягнутий Віном, полягає в тому, що температура входить у вираз для випромінюючої здатності тільки у вигляді відношення  $v/T$ . Старанні вимірювання ряду дослідників привели до встановлення емпіричного ходу функції  $\varepsilon_{vT}$  і дозволили перевірити теоретичні висновки Віна.

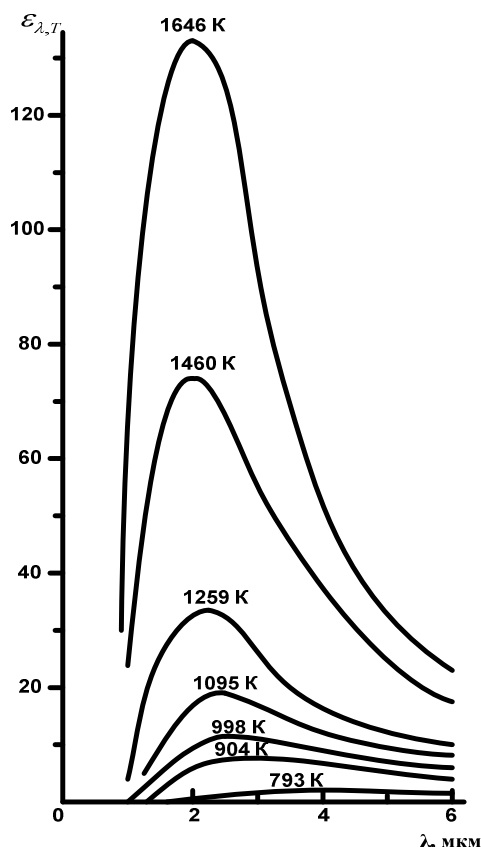


Рис. 1.5 - Криві розподілу енергії в спектрі чорного тіла для різних температур.

Метод дослідження полягав у вивченні розподілу енергії за спектром випромінювання абсолютно чорного тіла при різних температурах. Криві, одержані в результаті цих дослідів, наведені на рис. 1.5.

Вони виражають  $\varepsilon_{\lambda T}$  у функції  $\lambda$ . Із рисунку видно, що  $\varepsilon_{\lambda T}$  для кожної температури має максимум. Для визначення положення цього максимуму в шкалі  $\lambda$  перейдемо у виразі закону Віна від  $\nu$  до  $\lambda$ , користуючись співвідношенням

$$\varepsilon_{\nu} = \varepsilon_{\lambda} \frac{\lambda^2}{c}, \quad \varepsilon_{\lambda T} = \frac{c^5}{\lambda^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right)$$

Прирівнявши до нуля похідну  $\frac{\partial \varepsilon_{\lambda T}}{\partial \lambda}$ , не -

важко побачити, що положення максимуму  $\lambda_{\max}$  задовольняє умові

$$T \lambda_{\max} = b, \quad (1.6)$$

де  $b$ - не залежить від температури. Наведені на рис. 1.3 експериментальні криві підтверджують цей висновок і дають можливість визначити  $b$ , при цьому  $b=0,2898\text{см}\cdot\text{град}=2,898\cdot 10^7\text{А}\cdot\text{град}$ . У даній формі закон Віна має назву закону зміщення.

### 1.5. Формула випромінювання Планка

Багаточисельні спроби теоретично встановити закон чорного випромінювання, які привели до встановлення важливих часткових законів (Больцман, Він), не могли дати загального вирішення задачі і приводили до висновків, що узгоджуються з дослідом тільки в обмеженому інтервалі  $T$  і  $\nu$ .

Причина таких невдач виявилась надзвичайно глибокою. Закони класичної електродинаміки, за допомогою яких проводились ці дослідження, виявились лише приблизно правильними і давали невірний результат при розгляді елементарних процесів, які зумовлюють теплове випромінювання.

Якщо створити чорне тіло за допомогою нескінченної сукупності гармонічних осциляторів, кожний з яких дає окрему монохроматичну лінію, а всі разом – суцільне чорне випромінювання, то користуючись законами, які керують поведінкою цих осциляторів, можна прийти до закону чорного випромінювання такої системи. Загальні ж міркування, які лежать в основі закону Кірхгофа, показують, що закон випромінювання, знайдений для одного чорного тіла, справедливий і для будь-якого іншого чорного тіла, тобто всі вони дають один і той же тип випромінювання – чорне випромінювання.

Йдучи цим шляхом Планк не одержав, проте, закону, узгодженого з дослідом, і прийшов до висновку, що причина його невдач лежить в незастосовності законів класичної фізики до таких атомних осциляторів.

За класичними законами осцилятор частотою  $\nu$  може заключати в собі будь-яку кількість енергії, тому що енергія осцилятора пропорційна квадрату амплітуди; згідно з цим і випромінюючий осцилятор може випромінювати за одиницю часу будь-яку кількість енергії. Ці прості закони відповідно до висновку Планка не мають місця. Гармонічний осцилятор частоти  $\nu$  може мати тільки таку кількість енергії, в якій міститься ціле число елементарних порції величиною  $h\nu$ , де  $h$  – універсальна стала, рівна  $6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж  $\cdot$  с. Тому і випромінювання осцилятора їде порціями  $h\nu$  (або цілими кратними  $h\nu$ ).

Ці нові квантові закони не знаходяться у протиріччі з класичними в тій області низьких частот (наприклад радіочастот), для якої, власне кажучи, і були встановлені класичні закони на основі електромагнітної теорії Макровелі.

Дійсно, якщо  $\nu$  не дуже велике, то порція  $h\nu$  настільки мала, що в наших дослідах ми не можемо встановити, чи містить осцилятор ціле або дрібне число цих порцій. Наприклад, для  $\lambda=3\text{мм}$  величина  $h\nu$  складає  $6,626 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}$ , і ні в одному з дослідів з порівняно грубими осциляторами, підстроєними на цю довжину, ми не в змозі оцінити, чи є енергія осцилятора кратного цій малій величині.

Навпаки, для атомних осциляторів частота, а значить і елементарні порції енергії відповідно більші, а точність вимірювань атомних процесів така, що розходження між класичними й квантовими уявленнями стає дуже відчутним: висновки наближених класичних уявлень стають в різке протиріччя з дослідом, тоді як міркування, що враховують квантову теорію, приводять до гарного узгодження з ним.

Так, при розрахунку сукупності гармонічних осциляторів, які підкоряються класичним законам, Планк знайшов для функцій Кірхгофа вираз

$$\varepsilon_{\nu T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT, \quad (1.7)$$

відомий і раніше (формула Релея – Джінса)

Враховуючи ж нові закони, він одержав

$$\varepsilon_{\nu T} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} * \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (1.8)$$

Об'ємна спектральна густина  $U_{\nu T}$  енергії випромінювання з частотою  $\nu$  пов'язана з випромінюючою здатністю  $\varepsilon_{\nu T}$  співвідношенням

$$\varepsilon_{\nu T} = \frac{1}{4} U_{\nu T} c'. \quad (1.9)$$

Тому відповідно до Планка

$$U_{\nu T} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (1.10)$$

У цих формулах  $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$  означає швидкість світла,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/с} \cdot \text{град}$  – стала Больцмана (яка визначає у класичній

теорії середню енергію осцилятора  $kT$  при температурі  $T$ ),  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$  – стала Планка. Якщо  $\nu$  мале (або  $T$  велике), так що  $h\nu/kT$  мале в порівнянні з одиницею, то формулу (1.10) можна спростити. Дійсно, розкладаючи  $\exp(h\nu/kT)$  за степенями  $h\nu/kT$  і нехтуючи вищими степенями, знайдемо формулу, що співпадає з (1.7). Це співвідношення показує в узгодженні з основними припущеннями теорії квантів, що в області низьких частот її висновки не відрізняються від висновків класичної теорії. Класична теорія виявляється тільки наближенням до дійсності, наближенням, достатньо задовільним для того кола явищ, з якими має справу макроскопічна електродинаміка, тобто електродинаміка систем, що складаються з багатьох атомів або молекул. Можливо навіть рух іонів, тобто елементарних зарядів з великою масою (порівняно з електроном) це доволі задовільно описується класичною електродинамікою і механікою, хоча точність сучасних вимірювань і тут дозволяє встановити відхилення (досліди з дифракції молекулярних пучків).

Але поведінка електронів в атомах і молекулах повинна описуватися за допомогою квантових законів механіки і електродинаміки, застосовування ж до них законів, які мають силу для макросвіту, приводить до різких протиріч з дослідом.

Формула Планка дає гарне узгодження з результатами самих точних експериментальних досліджень залежності випромінюючої здатності чорного тіла від  $\nu$  і  $T$  і є, таким чином, повним вирішенням основної задачі, поставленої Кірхгофом.

Не важко пересвідчитись, що формула Планка включає в себе і закон Стефана - Больцмана, і закон Віна. При цьому з формули Планка не тільки одержується зовнішня форма цих законів, але й сталі, що входять до неї:  $\sigma$  і  $b$  можуть бути обчислені з універсальних сталих  $h, k, c$ . З іншого боку, користуючись експериментальними значеннями  $\sigma$  і  $b$ , можна обчислити значення  $h$  і  $k$ .

## 1.6. Лампи розжарювання

Із викладеного вище ясно, що використання розжареного тіла як джерела світла тим вигідніше, чим вище температура цього тіла. Дійсно, з підвищенням температури не тільки швидко збільшується загальна випромінювана потужність, але й зростає відносна частка променистої енергії, яка приходить на видиму частину спектра. За законом Стефана – Больцмана сумарна інтенсивність більш короткохвильових ділянок спектра зростає значно швидше, особливо при високих температурах. Так, поблизу температури червоного розжарення загальна енергія видимого спектру платини зростає пропорційно тридцятій степені температури і навіть поблизу білого каління – все це пропорційно чотирнадцятій степені температури. Інтенсивність жовтих променів зростає вдвічі, коли температура чорного тіла змінюється від 1800 до 1875K, тобто всього на 4 %.

Якщо б випромінювачем було чорне тіло, то, користуючись формулою Планка, ми могли б розрахувати для кожної температури цю частину корисної для освітлення енергії і обчислювати світлову віддачу нашого світлового джерела.

Коли прийняти до уваги, що максимум чутливості людського ока лежить біля 550 нм в жовто-зеленій частині спектра, то чорне тіло є найвигіднішим джерелом при температурі 5200K. Прийнято називати умовно «білим світлом» (у світлотехніці) випромінювання чорного тіла при цій температурі. Сонячне випромінювання поблизу поверхні Землі, тобто дещо змінене внаслідок поглинання в земній атмосфері має кольорову температуру, близьку до цього числа, що й дало підставу для такого умовного позначення.

При подальшому підвищенні температури чорного тіла випромінювання, яке приходить на корисну для освітлення частину спектра, звичайно зростає, але його частка в загальній випромінюванні



енергії падає, так що подальше підвищення температури неекономне з поглинання світлотехніки.

Випромінювання нечорних тіл, наприклад розжарених металів завжди менше випромінювання чорних тіл. Але світлова віддача, тобто відношення між енергією, корисною для освітлення і її невидимою частиною для розжареного металу при даній температурі  $T$  може бути вище, ніж для чорного тіла при тій же температурі, як видно з кривих, наведених на рис.1.4. Ці криві дають розподіл енергії за спектром для вольфраму і чорного тіла з однією і тією температурою, там же приведені відношення ординат обох кривих (пунктирна лінія), яка показує відношення випромінюючої здатності вольфраму для різних довжин хвиль до випромінюючої здатності чорного тіла. Із пунктирної кривої видно, що в області видимого світа випромінювання вольфраму складає 40% випромінювання чорного тіла тієї ж температури, а в області інфрачервоних променів - всього 20%. Така «селективність» випромінювання вигідно відрізняє вольфрам і в зв'язку з високою температурою плавлення робить його найкращим матеріалом для виготовлення ниток ламп розжарювання.

Із того ж рисунку видно, що хоча внаслідок селективності максимум випромінювання вольфраму зміщений дещо в область коротких хвиль у порівнянні з максимумом для чорного тіла, проте при температурі 2450K, при якій складений графік, максимум цей лежить біля 1100нм, тобто дуже далеко від максимуму чутливості ока (550нм). Тому подальше підвищення температури могло б значно підвищити світлову віддачу вольфраму.

Вказана температура відповідає нормальній температурі пустотної лампи розжарювання з вольфрамовою ниткою (на 50-60 Вт). Температура топлення вольфраму лежить вище (3655K), проте подальше розжарювання небезпечне, тому що нагріта нитка випаровується і розпилюється в пустоті настільки швидко, що підвищення температури нитки вище 2500K швидко веде до її руйнування.

Великим кроком вперед у справі покращення освітлювальної техніки була пропозиція Ленгмюра (1913р.) наповнювати балони ламп нейтральним газом, наприклад азотом або, ще краще, аргоном; тиск газу досягає приблизно  $\frac{1}{2}$  атм., присутність його дуже уповільнює розпилення вольфраму, що дозволяє збільшити температуру нитки до 3000K і більше без помітного скорочення терміну служби лампи (близько 1000год.); при цьому дуже підвищується світлова віддача.

Проте загальний коефіцієнт корисної дії лампи дорівнює відношенню енергії корисного частини спектру до загальної енергії живлення лампи, тобто доводиться враховувати не тільки втрати на невидиме випромінювання, але і на теплопровідність і конвекцію. Останні види втрат дуже збільшуються при заповненні колби лампи газом, так що газонаповнені лампи в сенсі збільшення ККД не мали б переваг перед пустотними, хоча світло їх було б приємне для очей, тому що воно ближче підходить до складу денного. Зменшення витрат на охолодження можна досягнути заміною прямої нитки розжарювання тонкою спіральною ниткою, окремі витки якої обігрівають один одного. Саме так і виконують сучасні економічні лампи розжарення, ККД яких значно вище ніж у пустотних ламп.

Табл. 1.1 дає уявлення про світлову віддачу ламп розжарення різного типу при нормальному режимі горіння. В якості міри світлової віддачі приймають відношення повного світлового потоку, який посилається лампою (в люменах), до повної потужності, що витрачається на живлення лампи (у ватах). Термін служби лампи – 1000год.

Таблиця 1.1 – Дані про світлову віддачу ламп різного типу

Тип лампи	Світлова віддача лм/Вт	ККД	Температура істинна	Температура кольорова	Яскравість $10^4$ кд/м <sup>2</sup>
1	2	3	4	5	6
50Вт, пустотна вугільна	2,5		2095	2130	близько 50
50Вт, пустотна вольфрамова	10	1,6%	2400	2505	150-200

Продовження таблиця 1.1

Тип лампи	Світлова віддача лм/Вт	ККД	Температура істинна	Температура кольорова	Яскравість $10^4 \text{ кд/м}^2$
1	2	3	4	5	6
50Вт, газонаповнена вольфрамова	10		2685	2670	близько 500
500Вт, газонаповнена вольфрамова	17,5	2%	2900	2880	близько 100
2000Вт, газонаповнена вольфрамова	21,2	3,5%	3020	3000	1300-1500

Із таблиці видно, що світлова віддача зростає із збільшенням температури нитки розжарювання (кольорової і істинної, з нею пов'язаної). Це підвищення температури досягається зміною типу ламп (газонаповнення) матеріалу нитки розжарюванню і розмірів лампи, тому що із зростанням потужності лампи втрати на охолодження відносно скеровуються розжарювання. Разом з температурою зростає і яскравість.

Значно більша світлова віддача електричних дуг, позитивний кратер яких має температуру близько 4000К. У дугах інтенсивного горіння (сила струму близько 300А) температура кратера досягає 5000К, а в дугах під тиском біля 20атм. Люммеру вдалося довести температуру кратера до 5900К, тобто одержати джерело, близьке за своїми світловими характеристиками до Сонця.

#### Список літератури

1. Борн М., Атомная физика пер. с англ., 3 изд. М., 1970.
2. Сивухин Д.В., Общий курс физики, 2 изд., т.4, Оптика, М., 1985.
3. Ландсберг Г. С., Оптика Изд. пятое, Изд-во «Наука»., М, 1976.
4. Планк М., Теория теплового излучения пер. с немец., Л-М., 1935.

## Питання для самоперевірки

1. Чому теплове випромінювання часто називають температурним випромінюванням?
2. Що таке рівноважне випромінювання
3. Запропонуйте конструкцію абсолютно чорного тіла
4. Чим відрізняються спектральний склад теплового випромінювання добре поглинаючих і прозорих тіл?
5. Користуючись формулою Планка, вивести закон Стефана – Больцмана.
6. Користуючись формулою Планка, вивести закон Віна.
7. Користуючись формулою Планка, вивести закон Релея – Джінса.
8. Як відноситься (більше, менше) випромінююча здатність нечорного тіла до випромінюючої здатності чорного тіла при однаковій температурі і на одній довжині хвилі?
9. Які переваги має вольфрам в якості нитки розжарювання ламп?
10. Порівняйте світлову віддачу АЧТ і вольфрамову при температурі 2450K.
11. При якій температурі абсолютно чорне тіло є найвигіднішим з точки зору світлової віддачі?
12. На якій довжині хвилі максимум сонячного випромінювання ( $T=5600\text{K}$ )?
13. Якій довжині хвилі відповідає максимум випромінювання абсолютного чорного тіла при кімнатній температурі ( $T=293$ )?
14. Чим відрізняється теплове випромінювання від будь-якого іншого, не збуджуваного нагріванням?
15. Що таке поглинальна здатність тіла?
16. Що таке абсолютно чорне тіло?
17. У чому полягає селективність випромінювання вольфраму?
18. Що таке спектральна випромінювальна здатність?

## **2. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ**

### **2.1. Корпускулярно-хвильовий дуалізм**

Квантова механіка, як і всяка інша фізична теорія, появилася в тісному зв'язку з розвитком нової області експериментальних досліджень. Ці дослідження, що почалися з вивчення властивостей випромінювання чорного тіла, на початку століття швидко розповсюдились на явище фотоструму, а потім на атомні системи. Безумовно, що створення квантової механіки було величезним тріумфом сучасної науки. Труднощі, на шляху розвитку квантової механіки визначалися тим, що властивості частинок, і яких побудовані атомні системи, кардинально відрізняються від макроскопічних тіл. Закони класичної механіки і класичної електродинаміки виявилися не спроможними для описування поведінки окремих молекул, атомів, а також елементарних частинок – електронів, протонів, нейтронів тощо. Надалі елементарні частинки, а інколи окремі атоми й молекули будемо об'єднувати терміном мікрочастинки. Як побачимо далі, відмінною рисою мікрочастинок є те, що їх рух не відповідає законам класичної механіки. З рядом фактів, що свідчать про неспроможність класичних уявлень в області квантових процесів, ми знайомі. Так, ми бачимо, що основна величина, яка характеризує стан окремих атомів і молекул – їх енергія має дискретний ряд значень.

Прямий доказ дискретності атомних систем було одержано в дослідженнях Франка і Герца (1913 р). У їх дослідах пучок електронів із заданою енергією направлявся в посудину, наповнену газом. Струм електронів, що пройшли через газ, як функція прискорюючого потенціалу мав ряд різких мінімумів. Положення цих мінімумів характерно для природи атомів газу. Така залежність струму від потенціалу може бути пояснена наступним чином. Електрони мають зіткнення з атомами і надають їм енергію у тих випадках, коли енергія електронів має певне значення, рівне

різниці енергій двох можливих станів атома. При цьому атом переходить у стан з більшою енергією – збуджений стан, а у значенні струму електронів з'являється мінімум.

Якщо енергія електронів має друге значення, вони відчують тільки пружні зіткнення. Таким чином, атом як ціле може отримати лише зовні певні порції енергії, або інакше кажучи, атом має дискретний спектр енергії. Дискретний характер енергетичних станів тягне за собою дискретний характер атомних переходів. При переході атому із збудженого стану на більш низький енергетичний стан різниця енергії випромінюється у вигляді світлового кванту.

Енергія атома - не єдина величина, що може приймати тільки дискретні, або як кажуть, квантові значення. У дослідах Штерна і Герлаха було показано, що таким дискретним спектром значень володіє і механічний момент атома. У цих дослідах пучок атомів проходив через неоднорідне магнітне поле  $\vec{H}$ , постійне за напрямком. Вибравши цей напрямок за вісь  $z$ , можна записати для сили, що діє на атом, вираз  $\mu_z \frac{\partial H_z}{\partial z}$ , де  $\mu_z$  - проекція магнітного потоку атому в напрямку поля. Коли вважати, що теорема про пропорційність між магнітним і механічним моментом справедлива для атомів, то із цього випливає, що середня сила є пропорційною величині  $L_z$  - проекції моменту кількості руху атома на напрямок поля.

Дослід Штерна і Герлаха показав, що пучок атомів ухиляється в магнітному полі, розділяючись на ряд окремих пучків. Це означає, що проекція механічного моменту атома на напрямок поля може приймати лише дискретний ряд значень.

Кожному допустимому значенню  $L_z$  відповідає своє значення сили і відповідна величина ухилу в неоднорідному магнітному полі. Таким чином кожний із створених пучків має атоми із заданим значенням величини  $L_z$ .

Дискретний характер допустимих значень основних величин, які характеризують стан атомних систем, знаходиться у глибокому протиріччі

всієї сукупності уявлень класичної механіки. Із загальних положень класичної механіки вихдить, що дуже мала сила викликає дуже малу зміну системи. Як наслідок, всі механічні величини, які залежать від стану системи, такі, наприклад, як енергія, кількість руху і т. н. є непереривними функціями стану. Дискретність станів і стрибкоподібна зміна станів мікрочастинок безпосередньо суперечить вказаному загальному принципу.

Труднощі розуміння властивостей мікрочастинок ускладнюються тим, що поряд з властивостями дискретності деяких величин, які характеризують стан частинок, в ряді дослідів проявлялась ясно виражена неперервність цих же величин. Так, гальмівне рентгенівське випромінювання електронів у полі ядер має неперервний спектр, що свідчить про неперервну зміну енергії випромінюваних частинок.

Сталося так, що мікрочастинки дивним чином поєднують в собі властивості частинок-корпускул і властивість хвиль. Ця основна властивість мікрочастинок має назву корпускулярно-хвильового дуалізму.

Основною властивістю корпускул, які вивчаються у класичній механіці, є наявність у них певної просторової протяжності. Ідеалізацією корпускули служить матеріальна точка, яка не має розмірів і рухається за певною траєкторією.

Властивості хвильових процесів у класичній фізиці до певної межі є оберненими властивостями корпускулярних об'єктів. Монохроматична хвиля наперед всього має безмежну протяжність у просторі. Тому не має сенсу твердження «монохроматична хвиля знаходиться у даній точці простору». Не має також сенсу говорити про траєкторію монохроматичної хвилі. Локалізація хвильового процесу у просторі пов'язана зі створенням хвильового пакету. Розміри хвильового пакету тим менші, чим більше число хвиль з різними частотами беруть участь в його створенні. Ця властивість хвильового процесу зовсім не залежить від їхньої фізичної природи, — вони справедливі для пружних, електромагнітних та інших хвиль. Таким чином, у

класичній фізиці локалізовані корпускули й делокалізовані у просторі хвильові процеси є деякому сенсі антиподами.

Виявилося, що у мікрочастинок має місце поєднання корпускулярних і хвильових властивостей, які не можна пояснити з погляду звичайних наглядних уявлень класичної фізики. Точніше кажучи, в деяких умовах мікрочастинки ведуть себе як корпускули, а в інших умовах ті самі мікрочастинки проявляють чисто хвильові властивості. зрештою, в деяких дослідах вони проявляють і корпускулярні і хвильові властивості.

Корпускулярно-хвильовий дуалізм властивостей мікрочастинок був спочатку знайдений в дослідах з світловими квантами. Хвильові властивості електромагнітного поля досить добре відомі. Відзначимо тільки, що корпускулярна теорія Ньютона могла успішно конкурувати з хвильовою теорією при поясненні такого явища, як прямолінійне розповсюдження і заломлення світла. Проте ця теорія була повністю залишена після відкриття інтерференції, дифракції і подвійного променевого заломлення.

Що ж до корпускулярних властивостей електромагнітного поля, то вони особливо яскраво проявляються в ефекті Комптона. Дійсно, цей ефект дозволяє лише одну інтерпретацію – корпускулярну. Ніякими іншими міркуваннями, заснованими на хвильових явищах, неможливо пояснити появу електронів віддачі: падаюча електронна хвиля не може визвати рух одного з атомних електронів, не збуджуючи при цьому рух інших електронів. Разом з тим теорія заснована на уявленні про зіткнення двох – падаючого фотона і атомного електрона, правильно передає закономірності процесу.

Корпускулярна природа світла проявляється також при фотоефекті, в явищі віддачі при випромінюванні атомів і т. ін. Таким чином, хвильова теорія світла, яка з успіхом застосовувалась при розгляданні найширшого кола електромагнітних явищ, була зовсім неспроможною пояснити ряд процесів, в яких проявлялась корпускулярна теорія світла.

Створену ситуацію коротко характеризували словами – має місце дуалізм властивостей електромагнітного поля. Іноді світло проявляє



хвильову природу, інколи веде себе як потік фотонів.

Сукупність експериментальних даних показала, що кожному фотону необхідно приписати енергію  $E$  і імпульс  $p$ , відповідно:

$$E = \hbar \omega; \quad (2.1)$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \frac{\hbar}{\lambda}, \quad (2.2)$$

де  $\hbar$  – стала Планка  $h$ , поділена на  $2\pi$ , дорівнює  $1,054 \cdot 10^{-27}$  ерг/сек.,  $\lambda = \frac{\lambda}{2\pi}$ .

Сталося так, що корпускулярно-хвильовий дуалізм має місце не тільки для фотонів, а й для усіх мікрочастинок.

Корпускулярні властивості мікрочастинок знайшли давно. Особливо яскраво вони проявляються при дослідах з камерою Вільсона. Відомо, що мікрочастинка, яка проходить через камеру Вільсона, заповнену насиченою парою, створює на своєму шляху іонізацію. Іони, створені мікрочастинками, стають центрами конденсації, яку можна безпосередньо бачити у вигляді штрихових слідів. Точно таким же чином при русі у фотоемульсії, яка нанесена товстими шарами на фотоплівку, частинки залишають фотографічне зображення – слід своєї проекції. Все це дозволяло думати, що мікрочастинки рухаються за певними траєкторіями і за своїми властивостями подібні звичайним корпускулам. Проте описані нижче досліди довали змогу виявити, що це не так і корпускулярно-хвильовий дуалізм властивостей є основною рисою всіх мікрочастинок. Слід також зазначити, що знаходження хвильових властивостей електронів, протонів та інших мікрочастинок передувало розвитку системи уявлень квантової механіки, в якій існування хвильових властивостей мікрочастинок було завбачено теоретично. Розглянемо наступний дослід. Через малий отвір в непроникливому екрані послідовно пропускають окремі електрони, які проходять через фіксоване прискорююче поле. Електрони, які проходять через отвір, попадають на фотоплівку і викликають почорніння у місцях попадання. Якщо б електрони рухалися як корпускули, то всі вони попали б в центр фотоплівки, утворюючи пляму почорніння. В дійсності, електрони повинні взаємодіяти з

атомами екрану. Оскільки останні знаходяться у тепловому русі, то ця взаємодія має випадковий характер. Тому природно було б чекати, що електрони викличуть почорніння фотоплівки, подібне тому, що визиваю молекулярний пучок, який виходить із вузького отвору. Чисельність електронів, які відхиляються від прямолінійного шляху і не попадають в центр екрану, залежить від величини відхилення за законом помилок. Інтенсивність почорніння, пропорційна чисельності електронів, які попадали в дану точку, повинна була б описуватись формулою Гауса. В дійсності нічого подібного в досліді не відбувається. Якщо послідовно пропускати через отвір велику кількість електронів, то можна виявити наступне:

1) існують зони на фотоплівці, в які електрони ніколи не попадають – «заборонені» зони. Ці зони мають характер концентричних кілець певної ширини;

2) зони, в які електрони попадають, утворюють систему концентричних кілець і чергуються із «забороненими» зонами.

Якщо дослід виконується довгий час, тобто електронів пропускають дуже багато, можна одержати смуги «почорніння», ідентичні з тими, що виникають при дифракції світла від круглого отвору. На рис. 2.1 подана така дифракційна картина.

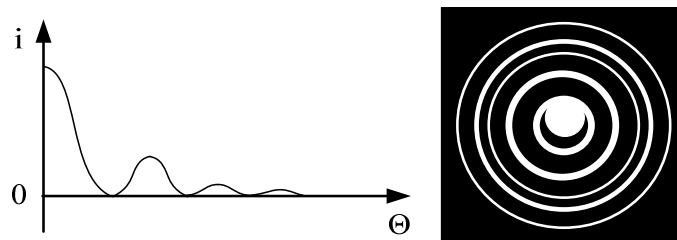


Рис. 2.1.

На рис. 2.1 представлено графік залежності інтенсивності попадання електронів залежно від кута дифракції  $\theta$ . Цей же результат можна одержати і при іншій постановці описаного досліді. Замість того, щоб пропускати

електрони поодинці, можна направити на отвір екрана пучок електронів. Пучок повинен бути достатньо розрідженим, щоб уникнути взаємодії електронів між собою. При проходженні пучка електронів через отвір екрану зразу виникне дифракційний розподіл інтенсивності почорніння фотоплівки.

Таким чином, рух кожного окремого електрона суттєво відрізняється від руху класичної частинки, яка проходить через щілину в екрані.

На перший погляд може здатися, що результати описаних вимірювань можна інтерпретувати наступним чином: за якихось не відомих причин у природі можуть реалізуватися не всі можливі траєкторії руху електронів, а тільки деякі допустимі. Сукупність цих допустимих траєкторій визначає місце попадання електронів на плівку. Однак інші досліди показують помилковість подібного трактування.

Розглянемо непроникливий екран з двома отворами. Якщо по черзі закривати один з отворів, а через другий пропускати послідовно окремі електрони, то після проходження великої кількості електронів на фотоплівці виникнуть дві описані вище картини інтерференційних смуг з центральною плямою проти кожного отвору. Відкриємо тепер обидва отвори і пропустимо через них електрони. Припустимо, що кожний з електронів рухається за певною допустимою траєкторією. Пройшовши через один з отворів, електрон визиває почорніння у певному місці фотоплівки. Підсумкова картина почорніння, створена великою кількістю електронів, при цьому мала бути б простим накладанням інтенсивностей почорніння, що виникають при пропусканні електронів через один отвір. Інакше кажучи, повинні бути такі почорніння плівки, як і при послідовному проходженні електронів, спочатку через один, а потім через інший отвір. Фактично картина розподілу інтенсивності почорніння має зовсім інший характер. Почорніння фотоплівки в точності відповідає картині дифракції від обох щілин. Це значить, що ніяких можливих або допустимих траєкторій електрона не існує.

Подібно до хвилі, електрон володіє інтерференційними властивостями і неспроможними були б спроби встановити, через яку щілину (одну з двох) «в дійсності» пройшов даний електрон.

Ми бачимо, що з електроном пов'язаний деякий хвильовий процес, електрон має хвильові властивості. Саме через і хвильові якості окремий електрон, який проходить через один отвір, може попасти в одні області фотоплівки і не може попасти в інші її частини. При проходженні через дві щілини хвильові властивості окремого електрона проявляються в тому, що на його рух впливають обидві щілини. Дозволені й недозволені для попадання ділянки фотоплівки співпадають з темними і світлими зонами при дифракції від обох щілин.

Було б неправильно, проте, на основі цих роздумів ототожнити електрон з деякою хвилею. Якби це було так, то почорніння фотоплівки, на яку попадає дифракційна хвиля (окремий електрон), була б блідою копією потемніння, створеного багатьма електронами. Окремий електрон відразу б давав всю картину інтерференції.

Ми підкреслювали, що в досліді окремий електрон попадає в певну точку плівки як звичайна корпускула. Різниця окремого електрона від корпускули проявляється в тому, що місце попадання на фотоплівку визначається зовсім іншим законом, ніж місце попадання корпускули. Таким чином, хвильові властивості, як показує дифракційний дослід, має кожний електрон, але наглядно виявляються вони тільки у великій кількості однакових експериментів (послідовне проходження великої кількості електронів).

Дифракційні досліді дозволяють дати відповідь на запитання: «що таке електрон – хвиля чи корпускула?». При цьому під термінами «хвиля» і «корпускула» ми розуміємо звичний нам класичний сенс. Відповідь, що впливає з описаних дослідів, полягає в тому, що електрон є не хвилею (інакше один електрон давав би повну дифракційну картину), ні корпускулою, яка рухається по певній траєкторії (що суперечить дослідом з

обома щілинами). Електрон є мікрочастинкою із специфічними властивостями.

## 2.2. Хвильова функція

Наявність в електрона хвильових властивостей показує, що електрону необхідно відвести деяке хвильове поле. Амплітуду цього хвильового поля, яка залежить від координат і часу, будемо називати хвильовою функцією  $\psi(x, y, z, t)$ . Інколи її для стислості також іменують  $\psi$ -функцією.

Фізичне тлумачення хвильової функції, (яке вперше дав М. Борн) полягає в наступному: величина  $|\psi(x, y, z, t)|^2 dV$  пропорційна ймовірності того, що електрон буде знаходитися в момент часу  $t$  в елементі об'єму  $dV$ , розташованому в околиці точки  $x, y, z$ .

Позначимо цю ймовірність через  $dW$  і маємо

$$dW \sim |\psi(x, y, z, t)|^2 dV \quad (2.3)$$

Підставою для подібного трактування є наступні міркування. У дослідах з пропусканням окремих електронів через одну або дві щілини ми бачили, що місце попадання електронів на фотоплівку було до певної міри випадковим. Електрон міг зовсім випадково попасти в ту чи іншу точку майбутнього дифракційного кільця. Тому поведінка електрона повинна характеризуватися деякою ймовірнісною функцією. Інтенсивність почорніння плівки в даному місці пропорційна числу електронів, які попадають.

Ясно, з іншого боку, що ця ймовірнісна функція повинна бути пов'язана з властивостями хвильового поля. Тільки про цьому сумісництві може бути почорніння плівки в даному місці з точним просторовим розподілом смуг почорніння. Саме таким чином можливе сумісництво ймовірнісного характеру попадання електрона в певну точку з його хвильовими властивостями, тільки коли припустити, що ймовірність

виявлення електрона в даному місці пропорційна інтенсивності хвильового поля  $|\psi|^2$ . Цей зв'язок і дає формула (2.3).

Фізичне трактування хвильової функції, що дається формулою (2.3), показує, що хвильове поле  $\psi(x, y, z, t)$  суттєво відрізняється від інших хвильових полів, відомих у класичній фізиці. Це особливо має прояв у тому, що безпосередній фізичний зміст має лише величина  $|\psi|^2$ . Саме хвильова функція може бути, взагалі кажучи, комплексною величиною. Крім цього, хвильові функції  $\psi$  і  $A\psi$ , де  $A$  – будь яка стала, відповідають одному і тому ж фізичному стану частинки, оскільки в силу визначення (2.3) обидві ці хвильові функції призводять до одного і того ж просторово-часового розподілу ймовірності виявлення частинки.

В силу теореми складання ймовірностей визначення (2.3) може бути доповнено наступними умовами нормування:

$$\int |\psi(x, y, z, t)|^2 dV = 1, \quad (2.4)$$

де інтеграл, взятий по всьому простору, є ймовірність виявлення частинок в момент часу  $t$  в будь-якій точці простору. Ця ймовірність природно дорівнює одиниці. Хвильові функції  $\psi$ , які відповідають умові нормування, називаються нормованими. Для нормованих хвильових функцій співвідношення (2.3) можна переписати у вигляді

$$dW = |\psi(x, y, z, t)|^2 dV = \rho(x, y, z, t) dV \quad (2.5)$$

де  $\rho(x, y, z, t)$  – щільність ймовірності. Ймовірність  $W(V, t)$  виявлення частинки в деякому об'ємі  $V$  в межах часу  $t$  за теорією складання ймовірностей дорівнює

$$W(V, t) = \int_V dW = \int_V |\psi(x, y, z, t)|^2 dV. \quad (2.6)$$

Умова (2.4) не виконується в тому випадку, коли інтеграл  $\int |\psi|^2 dV$  розходиться. Це може мати місце, зокрема, якщо квадрат модуля хвильової

функції  $|\psi|^2$  не прагне до 0 на нескінченності. Фізично це означає, що має місце кінцева ймовірність виявлення частинки у деякій точці простору.

Відмітимо, що хвильова функція, нормована умовою (2.4), визначена з точністю до множника  $e^{i\alpha}$ , де  $\alpha$  – будь-яка дійсна функція координат і часу, маючи на увазі рівність  $|e^{i\alpha}|^2 = 1$ .

Перш ніж спробувати побудувати хвильову функцію для найпростішого випадку руху мікрочастинки, необхідно зробити наступне дуже важливе зауваження. На перший погляд можна припустити, що для описування станів мікрочастинок, які проявляють собою зовсім нові за своєю фізичною природою об'єкти, необхідно ввести у фізику нові поняття. Виявляється, однак, що це не зовсім так. Стан і характер руху мікрочастинок можна до деякої міри характеризувати величинами й термінами класичної фізики. На це вказує корпускулярно-хвильовий дуалізм мікрочастинок, який складається з того, що в деяких дослідах мікрочастинки проявляють (поводять) себе як об'єкти з хвильовою природою, а в інших дослідах вони ведуть себе як звичайні корпускули.

Ми в деякій мірі допустили, що до мікрочастинки можна застосувати поняття класичної фізики, коли ввести статистичне (ймовірнісне) трактування хвильової функції. Справді твердження, що «мікрочастинка може бути виявлена в елементі об'єму  $dV$ » вже містить припущення, що можливий класичний підхід до описування її стану шляхом завдання її положення у просторі. Якщо ж мікрочастинка була б подібна хвилі, то вже сама постановка запитання, «де можна виявити мікрочастинку?», була б позбавлена сенсу. З другого боку, наявність дифракційної картини дозволяє за певних умов проте зіставити мікрочастинці інше класичне поняття – певну довжину хвилі  $\lambda$  і говорити про довжину хвилі, що відповідає хвильовій функції частинки.

Класичні поняття, такі як положення частинки, довжина хвилі і т. ін. можуть бути застосовані до мікрочастинки лише у певних межах. Суттєвим є

не те, що при описуванні мікрочастинок поняття класичної фізики має обмежене застосування, а те, що вони можуть і повинні використовуватися при описуванні нових об'єктів, таких же схожих на звичайні мікроскопічні тіла або хвилі.

Припустимо, що стан електрона, який вільно рухається у просторі, можна характеризувати енергією  $E$  і імпульсом  $\vec{p}$ . При цьому зв'язок між енергією та імпульсом дає класича формула:

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (2.7)$$

Припустимо, що пучок електронів, які пройшли строго визначену різницю потенціалів і отримали таку енергію, поступають у дифракційний пристрій (на практиці таким пристроєм звичайно є кристалічні ґратки). Формула (2.7) дозволяє говорити про визначений імпульс електрона.

З іншого боку, знаючи дифракційну картину, можна знайти довжину хвилі  $\lambda$ , що відповідає електрону. Виявляється, що між величинами  $\lambda$  і  $p$  існує співвідношення

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \hbar k. \quad (2.8)$$

Співвідношення (2.8), вперше запропоноване у 1924 р. де Бройлем на основі теоретичних міркувань, має назву формули де Бройля. Хвилю, пов'язану з рухом мікрочастинки, називають хвилею де Бройля.

Як, бачимо, формула де Бройля співпадає з формулою для світлових квантів. Частоти, які відповідають хвилям де Бройля, не можна безпосередньо визначити експериментальним шляхом.

Природно допустити, що до хвилі де Бройля можна застосувати те ж співвідношення між енергією і частинкою, що і для світлових квантів, тобто

$$E = \hbar\omega. \quad (2.9)$$



Грунтуючись на співвідношеннях (2.8) і (2.9), представимо хвильову функцію вільної частинки у вигляді плоскої монохроматичної хвилі:

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = Ae^{i/\hbar(\vec{p}\vec{r} - Et)}, \quad (2.10)$$

де стала  $A$  визначається умовою нормування.

За визначенням  $\vec{k}$  – хвильовий вектор

$$\vec{k} = \frac{1}{\hbar} \vec{p} \quad (2.11)$$

За допомогою формул (2.7), (2.8), (2.9) знайдемо закон дисперсії хвиль де Бройля:

$$\omega = \frac{1}{\hbar} E = \frac{p^2}{2\hbar m} = \frac{\hbar k^2}{2m}. \quad (2.12)$$

Відповідні фазові і групові швидкості дорівнюють

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}; \quad (2.13)$$

$$V_{gp} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{1}{m} p. \quad (2.14)$$

Формула (2.14) показує, що групова швидкість хвиль де Бройля співпадає з звичайною швидкістю мікроскопічної частинки. Якщо б ми взяли за вихідний вираз для швидкості частинки величину  $V_{gp}$ , то співвідношення між енергією і частотою (2.9) можна було отримати, як наслідок цього визначення. Фазова швидкість хвиль де Бройля  $V_{\phi}$  не має безпосереднього фізичного сенсу.

Це стає ясним, якщо використати релятивістський вираз для зв'язку енергії з імпульсом частинки:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{\hbar^2 c^2 k^2 + m^2 c^4} = \hbar \omega.$$

При цьому

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{\hbar k} = \sqrt{c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2 k^2}} > c,$$

тобто  $V_{\phi}$  більше швидкості світла.

### 2.3. Принцип суперпозиції

Ми вже вказували на те, що дослід з електронним пучком еквівалентний сукупності послідовно проведених вимірювань з великим числом електронів, що знаходяться в тотожних зовнішніх умовах. Тому можна сказати, що дифракційна решітка відіграє роль приладу, який аналізує вихідне становище мікрочастинки, розкладаючи його на сукупність окремих станів з певними значеннями імпульсу. Оскільки стану з визначеним імпульсом відповідає плоска хвиля (2.10), то, як наслідок, в загальному випадку хвильова функція, що описує вихідний стан електрона, який падає на решітку, може бути представлена у вигляді суперпозиції плоских хвиль, тобто

$$\psi(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(p_x, p_y, p_z) \psi_p(x, y, z, t) dp_x dp_y dp_z. \quad (2.15)$$

Фізично це означає, що хвильову функцію електрона в довільному стані можна розглядати як результат накладання хвильових функцій, що відповідають станам з певним значенням імпульсу.

Немає причин для подиву, що один електрон може знаходитись у визначеному стані і при цьому не мати зовсім певного значення імпульсу. Хоча поняттям імпульсу, перенесеним на мікрочастинку із класичною механіки можна користуватись у квантовій механіці, стан мікрочастинки не задається за тими ж законами, що і стан частинки в класичній механіці. Ми ще повернемося до цього питання.

Якщо вибрати коефіцієнт  $A$  у формулі (2.10) у вигляді

$$A = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}, \quad (2.16)$$

то маємо

$$\psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\vec{p}) \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i/\hbar(\vec{p}\vec{r} - Et)} d\vec{p} \quad (2.17)$$

З математичного погляду формула (2.17) представляє розклад функції  $\psi(\vec{r}, t)$  в інтеграл Фур'є. Амплітуда  $c(\vec{p})$  показує, з якою вагою стан с певним імпульсом  $\psi_p$  поданий у довільному стані, що описує хвильова функція  $\psi(\vec{r}, t)$ . Відповідно дорівності

Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i(\omega t + \varphi(\omega))} d\omega \right\} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\varphi(\omega)} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right\} d\omega,$$

$$\text{але } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = F^*(\omega) = A(\omega) e^{-i\varphi(\omega)},$$

$$\text{тобто } \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (A(\omega))^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Так що

$$\int |\psi|^2 dV = \int |c|^2 d\vec{p}. \quad (2.18)$$

При виборі коефіцієнта  $A$  у вигляді (2.16) в рівності (2.18) не міститься числових коефіцієнтів. Природно допустити, що  $|c(\vec{p})|^2$  може бути пов'язано з щільністю ймовірності  $\rho(\vec{p})$  знайти в частинки, яка знаходиться у стані  $\psi(\vec{r}, t)$ , значення імпульсу, рівне  $\vec{p}$ . Тому можна допустити, що

$$\rho(\vec{p}) = |c(\vec{p})|^2 \quad (2.19)$$

Ми пишемо знак рівності, а не знак  $\sim$  (пропорційності), бо функція  $\psi$  нормована. При цьому має місце рівність

$$\int |c(\vec{p})|^2 d\vec{p} = 1. \quad (2.20)$$

Рівність (2.17) є окремим випадком одного з важливих положень квантової механіки – принципу суперпозиції. Зміст цього принципу зводиться до наступного: якщо квантова система може знаходитися у станах, що описуються функціями  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ , то лінійна комбінація (суперпозиція) хвильових функцій  $\psi_n$

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n, \quad (2.21)$$

де  $c'_n$  – довільні сталі також є хвильовою функцією, що описує один з можливих станів системи. Можливість принципу суперпозиції полягає в тому, що він обмежує можливі рівняння для визначення  $\psi$  лінійними рівняннями. Якщо індекс  $n$ , що характеризує стан, пробігає непереривний ряд значень, то знак суми у формулі (2.21) повинен бути замінений інтегруванням.

Як приклад розглянемо застосування принципу суперпозиції вільної частинки, імпульс якої не має певно визначеного значення, а лежить в інтервалі  $\Delta \vec{p}$  біля значення  $\vec{p}_0$ , а саме:  $\vec{p}_0 - \Delta \vec{p} \leq \vec{p} \leq \vec{p}_0 + \Delta \vec{p}$ . Для простоти розглянемо випадок одновимірного руху. Відповідно (2.15) хвильову функцію електрона можна написати у вигляді

$$\psi(x, t) = \int_{p_0 - \Delta p}^{p_0 + \Delta p} c(p) \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} e^{i/\hbar (px - Et)} dp = \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi}} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} c'(k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (2.22)$$

Коефіцієнт  $A$  для одновимірного руху дорівнює  $\frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}}$ .

Запишемо  $k = k_0 + (k - k_0)$ ,

$$\omega = \omega(k); \quad \omega = \omega_0 + \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 (k - k_0),$$

$$\int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} c'(k_0 + \Delta k) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} e^{i(k - k_0) \left[ x - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right]} dk = e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-k}^{+k} c'(k) e^{ik \left[ x - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right]} dk ,$$

$$\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = \sin \alpha$$

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi}} 2c'(k_0) \frac{\sin \left[ \Delta k \left( x - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right) \right]}{\left[ x - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right]} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} . \quad (2.23)$$

Формула (2.23) показує, що суперпозиції хвильових функцій, які відповідають близьким значенням імпульсів або хвильових чисел призводить до створення хвильового пакету, що переміщується з груповою швидкістю

$$V_{gp} = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 = \frac{1}{m} p_0$$

Хвильова функція (2.23) показує, що ймовірність знаходження мікрочастинки в точці  $x$  в момент часу  $t$ , пропорційно  $|\psi(x, t)|^2$  має різкий максимум, що рухається з швидкістю  $V_{gp}$ .

Слід підкреслити, що рівність (2.23) має наближений характер. Врахування наступних членів розкладу функції  $\omega(k)$  привело би до виразу для хвильового пакету, ширина якого збільшується з часом. Говорять, що відбувається розпливання хвильового пакету. Факт розпливання пакету безпосередньо впливає з того, що кожна хвиля, що створює пакет, рухається із своєю фазовою швидкістю  $V_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}$ .

## 2.4. Співвідношення невизначеності

Використаємо подання хвильової функції у вигляді хвильового пакету для обговорення досить важливого принципового питання. Мова йде про те, в якій мірі і з якою точністю можна користуватися поняттям класичної механіки стосовно до мікрочастинок. Ми обмежилися тут розгляданням поняття імпульсу і положення частинки в просторі.

Ми знаємо, що хвильовий пакет має обмежену просторову й часову протяжність. Стосовно хвильового пакету формула може бути записана в контексті питання, що нас цікавить, у вигляді

$$\Delta p_x \Delta x \sim \hbar.$$

Оскільки має місце розпливання пакету, яке не враховане при одержанні цієї формули, її правильно записати як

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar. \quad (2.24)$$

Аналогічно можна написати співвідношення

$$\Delta p_y \Delta y \geq \hbar. \quad (2.25)$$

Формули (2.24), (2.25) мають назву співвідношення невизначеності Гейзенберга. Обговоримо смисл цих нерівностей, виходячи з ймовірного трактування хвильової функції. Якщо ширина хвильового пакету дорівнює  $\Delta x$ , то відповідно до сказаного в попередньому параграфі, вимірювання координати електрона покажуть, що з переважною ймовірністю він буде знайдений в області простору  $\Delta x$ . У цьому сенсі можна говорити, що координата електрона визначена з точністю до величини  $\Delta x$ . При цьому, проте, електрон, який знаходиться в області  $\Delta x$ , не описується плоскою хвилею і не має певного значення імпульсу. Для створення хвильового пакету шириною  $\Delta x$  необхідно було створити суперпозицію плоских хвиль з імпульсами в інтервалі  $p_0 - \Delta p_x \leq p_x \leq p_0 + \Delta p_x$ , де  $\Delta p_x$  визначено за формулою (2.24). Це означає, що вимірювання імпульсу електрона, локалізованого в області  $\Delta x$ , буде приводити до значень імпульсу, який лежить у вказаному інтервалі. Іншими словами, невизначеність у значенні координати електрона  $\Delta x$  (локалізованого в області  $\Delta x$ ) і невизначеність у значенні його імпульсу  $\Delta p_x$  пов'язані співвідношенням (2.24). Чим менше ширина пакету  $\Delta x$ , тим більше  $\Delta p_x$ . З іншого боку, якщо заданий інтервал імпульсів  $\Delta p_x$ , то формула (2.24) показує, що частинка з переважною ймовірністю буде виявлена в області простору розміром  $\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p_x}$ .

З нерівності (2.24) випливає, що величини  $\Delta x$  і  $\Delta p_x$  не можуть дорівнювати нулю одночасно. Це означає, що координата  $x$  і спряжений з нею імпульс  $p_x$  не можуть одночасно мати досить визначені значення. Таким чином, класичні поняття просторового положення і величини імпульсу можуть бути застосовані до мікрочастинок в певних межах, які дає співвідношення Гейзенберга. Всіляка спроба одночасно застосувати до мікрочастинок поняття імпульсу і координати з великою точністю за рамками співвідношення невизначеності, не має сенсу. Ця обставина пов'язана з самою природою мікрочастинок, з їх корпускулярно-хвильовими властивостями. У цьому зв'язку необхідно застерегти від помилки, яку допускають деякі автори, вважаючи, що співвідношення невизначеності Гейзенберга дає ту межу точності, з якою можуть бути визначені координати і імпульс мікрочастинок в рамках квантової механіки. На їх думку, для більш точного одночасного визначення координат і імпульсів необхідний подальший розвиток теорії. У дійсності це не так. Мікрочастинка є зовсім новим, зовсім неklasичним об'єктом зі своїми характерними властивостями і законами руху. Як ми вже вказували, відмінною рисою мікрочастинок є виявлений нею дуалізм хвильових і корпускулярних властивостей. Із дифракційних дослідів виходить, що частинка не має траєкторії. Тому описування її руху завданням точного значення координат і імпульсу в кожний момент часу, як це робиться у класичній механіці, не можливе. Проте можна вказати з деяким ступенем точності величину тієї області простору, в якій частинка з переважною ймовірністю буде знайдена, і інтервал тих значень імпульсу, яким вона при цьому володіє. Значення цих величин дає співвідношення невизначеності Гейзенберга.

Відмітимо, що коли частинка має зовсім визначене значення імпульсу  $\Delta p_x = 0$ , то відповідно з (2.24) її положення зовсім невизначене, тобто  $\Delta x \rightarrow \infty$ . Дійсно, стан з визначеним імпульсом описується плоскою хвилею де Бройля.

Для такої хвилі квадрат модуля  $|\psi_p|^2$  постійний, тобто частинка з однаковою ймовірністю може бути знайдена в будь-якій точці простору.

З другого боку, якщо задане зовсім певне положення частинки в даний момент часу, то її імпульс зовсім не визначений. Може здатися, що одержане співвідношення знаходиться у протиріччі з фактом існування чітких треків частинок в камері Вільсона або на фотоплівці. Але це протиріччя тільки уявне. Дійсно, слід електрона в камері Вільсона подається краплинами рідини, які утворюються на створених ним іонах. Розмір краплин дає ступінь точності, з якою може бути фіксована координата частинки. Оскільки розміри краплин мають порядок  $10^{-4}$  см, невизначеність у координатах електрона також має порядок  $10^{-4}$  см. Внаслідок цього невизначеність відповідної компоненти імпульсу  $\Delta p_x \sim \frac{\hbar}{\Delta x} \sim 10^{-23} \text{ г} \cdot \text{см} / \text{сек}$ . Оскільки маса електрона дорівнює  $\sim 10^{-27} \text{ г}$ , то невизначеність у складовій швидкості, направленої перпендикулярно до треку, дорівнюватиме

$$\Delta V_x = \frac{1}{m} \Delta p_x \equiv 10^4 \text{ см} / \text{сек}. \quad (2.26)$$

Проте сліди в камері Вільсона залишають лише досить швидкі електрони, які мають швидкість  $V$  порядку  $\geq 10^9 \text{ см} / \text{сек}$ . Таким чином, ми бачимо, що у вказаних умовах  $\Delta V_x \ll V$  і можна говорити про приблизний рух частинки уздовж деякої траєкторії в камері Вільсона.

Співвідношення невизначеності Гейзенберга, записане у вигляді

$$\Delta V_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{m}, \quad (2.27)$$

показує, що поняття класичної фізики можуть бути застосовані з тим більшою мірою ступенем точності, чим більше маса частинки. Оскільки квантова стала  $\hbar$  дуже мала, невизначеність у значеннях координати і швидкості стає нехтівно малою у частинок макропічно малих, але це не атомного розміру.



Нехай, наприклад, маємо тіло розміром десь близько 1 мікрона з масою менше  $10^{-10}$  г.

Тоді (2.27) дає

$$\Delta V_x \Delta x \geq 10^{-17} \text{ см}^2 / \text{сек}.$$

Якщо, наприклад, положення тіла визначено з точністю  $10^{-6}$  см ( $\frac{1}{100}$  його розмірів), то

$$\Delta V_x \sim 10^{-11} \text{ см} / \text{сек}.$$

Швидкість броунівського руху частинки з масою  $10^{-10}$  г становить  $\sim 10^{-4}$  см/сек. Як бачимо, що похибка в швидкості, пов'язана із співвідношення невизначеності, дуже мала вже в такого невеликого тіла. Тим більше вона не відіграє ролі у макроскопічних тіл.

Наведені оцінки є ілюстрацією загального важливого положення квантової механіки, яке має назву принципу відповідності при переході до  $\hbar \rightarrow 0$ , тобто якщо ефектами, пропорційними квантовій сталій  $\hbar$ , можна знехтувати, закони і співвідношення квантової механіки переходять у відповідні закони і співвідношення класичної механіки. Так, у частинок з великою масою відношення  $\frac{\hbar}{m}$  настільки мале, що практично її координата і швидкість мають певні значення. Така частинка має траєкторію, по якій вона рухається відповідно до законів класичної механіки. Важливість принципу відповідності полягає в тому, що він служить методом знаходження квантово-механічних аналогів класичних величин. Квантова механіка містить в собі класичну механіку як граничний випадок, що відповідає  $\hbar \rightarrow 0$ . Завдяки принципу відповідності можна встановити зв'язок між деякими квантово-механічними величинами і поняттями класичної механіки.

Поряд з наведеними нами вище міркуваннями, співвідношення невизначеності часто отримують з обговорення можливого ступеня точності визначення координати й імпульсу мікрочастинки в різних принципово можливих експериментах.

Відмітимо, що коли задана область можливого руху мікрочастинки, наприклад, розмір  $l$  атома або ядра, то співвідношення невизначеності дозволяє якісно оцінити значення його імпульсу і енергії. Дійсно, абсолютна величина імпульсу за порядком величини рівна його невизначеності  $\Delta p \sim \frac{\hbar}{l}$ .

Таким чином,  $p \geq \frac{\hbar}{l}$ , а енергія частинки

$$E = \frac{p^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2ml^2}, \quad (2.28)$$

Як бачимо, з зменшенням області локалізації енергія зростає. Наприклад, для електрона в атомі  $l$  порядку розмірів атома, тобто порядку  $10^{-8} \text{ см}$ . Підставивши це значення в (2.28), знаходимо, що енергія електрона в атомі  $E \geq 10 \text{ eV}$ . Отримане значення дає правильний порядок величини.

Розглянемо далі протон або нейтрон, що знаходиться в ядрі. Розміри ядра порядку  $10^{-12} \text{ см}$ . Вважаючи  $l \sim 10^{-12} \text{ см}$  і враховуючи, що маса протона  $m \sim 10^{-24} \text{ г}$ , знаходимо для енергії  $E$  оцінку  $E \geq 1 \text{ MeV}$ . Ця оцінка також відповідає дослідним даним.

## 2.5. Принцип причинності у квантовій механіці

Поняття класичної фізики можуть бути застосовані до мікрочастинок лише в відомих межах. Постає запитання чому ми взагалі можемо і повинні описувати рух мікрочастинок за допомогою класичною фізики? Необхідність введення класичних понять у квантову механіку пов'язана з наступною важливою обставиною: вивчення властивостей і законів руху будь-яких мікрооб'єктів можливе лише шляхом зведення їх до взаємодії з макроскопічними тілами.

Макроскопічне тіло, яке взаємодіє з мікрочастинкою, має назву приладу. процес взаємодії між приладом і мікрочастинкою має назву вимірювання. Зрозуміло, прилад в цьому значенні слова не обов'язково є пристрій для реєстрації властивостей мікрочастинок, виготовлений штучно.

Прилад є будь-яке тіло, яке може змінити цей стан в результаті взаємодії з мікрооб'єктами і в достатньою мірою точності описується законами класичної фізики. Проте взаємодія приладу з мікрочастинкою – вимірювання – є об'єктивним процесом, що протікає у просторі й часі. Ясно, проте, що оскільки будь-яке наукове знання може бути засновано лише на факті і характері вказаної взаємодії, всі характеристики мікрочастинок повинні бути безпосередньо пов'язані з властивостями їхньої взаємодії з макроскопічними тілами. Це і означає, що описання мікрочастинки повинно обов'язково включати, хоч і частково, поняття класичної фізики. Зрозуміло, можуть також існувати й такі характеристики і властивості мікрочастинок, що проявляються у взаємодії з приладами, але не мають класичного аналогу (наприклад, спин).

Взаємодія між мікрочастинками і макроскопічними тілами, зрозуміло, суттєво відрізняється від взаємодії макроскопічних тіл між собою. А саме, при взаємодії між одним макроскопічним тілом і другим, що відіграє рол приладу, завжди можна вважати обернений вплив приладу на тіло як завгодно малим або, у крайньому разі, точно врахувати його. Тому кажуть, що вплив приладу не змінює стан макроскопічного об'єкта.

Інша справа постає при взаємодії фізичних об'єктів різної природи – мікрочастинок і макроскопічного тіла – приладу. Тут принципово неможливо вважати дію приладу на мікрочастинку малим і несуттєвим. Розглянемо простий приклад. Припустимо, що сукупність електронів послідовно пропускається через щілину в екрані. Екран з щілиною є макроскопічним тілом – приладом, що вимірює  $y$ - координату електрону з точністю  $\Delta y$ , де  $\Delta y$  – ширина щілини.

Стан усіх електронів до взаємодії був тим самим. Нехай, наприклад, падають електрони з певним напрямком імпульсу  $\vec{p}$  вздовж осі  $x$ . При цьому  $p_y = 0$ . Стан приладу до взаємодії також є заданим, але заданим макроскопічним чином. У процесі взаємодії приладу з електроном останній локалізується в області  $\Delta y$ , що визначається розміром отвору в екрані. При

цьому стан електрона суттєво зміниться. Із стану з певною компонентою імпульсу  $p_y = 0$  електрон перейде в стан, в якому компонента імпульсу  $p_y$  має значення, що лежить в інтервалі  $\Delta p_y \sim \frac{\hbar}{\Delta y}$ . Дійсно, як ми знаємо, при проходженні електронів крізь щілину з'являється дифракція і в електронів з'являється складова імпульсу на осі  $y$ . Якщо послідовно пропускати електрони і вимірювати значення їх компоненти імпульсу  $p_y$ , то будемо одержувати всілякі значення  $p_y$ , що лежать в інтервалі  $\Delta p_y$ .

Таким чином дія приладу на електрон змінює його стан і при цьому принципово не може зробити його малим. Хоч до вимірювання мікрооб'єкт і прилад знаходились в певному стану, результат взаємодії з приладом не є однозначним: ми отримуємо стан з невизначеним значенням компоненти імпульсу  $p_y$ . Ми можемо тільки знайти ймовірність того чи іншого значення цієї величини.

У результаті проведення послідовної, як завгодно великої серії вимірювань ми одержимо не більш точні значення  $p_y$ , а тільки більш точний вираз для розподілу ймовірностей різних значень цієї величини. Якщо мікрооб'єкт знаходився у заданих зовнішніх умовах, то неможливо точно прогнозувати результат вимірювань. Можна говорити лише про розподіл ймовірностей результатів вимірювання. Це пов'язано не з недоліками й недостатністю теорії, але з самою природою мікрочастинок.

Звідси початкове значення деякої величини і певний закон взаємодії не визначає однозначно значення цієї вимірюваної величини для мікрочастинки в наступні моменти часу.

Таким чином, поведінка окремої мікрочастинки, а не тільки їх сукупності визначається закономірностями статистичного типу.

Закон причинності для мікрочастинки приймає такий характер: нехай відомий стан частинки в початковий момент часу  $t = 0$ . Це означає, що відома її хвильова функція  $\psi(\mathbf{r}, 0)$ . Якщо відомі всі відчуті мікрочастинками

взаємодії, то, як побачимо, можна визначити її хвильову функцію в наступні моменти часу  $t > 0$ .

Із суті хвильової функції випливає, що тим самим ми можемо завбачити ймовірності того, що величини, які характеризують частинку — координата, імпульс, енергія та інші, будуть мати те або інше значення в будь-який момент часу  $t > 0$ .

Сформульований таким чином принцип причинності в квантовій механіці має більш загальний характер, ніж динамічна закономірність (лапласівський детермінізм) класичної механіки.

## 2.6. Хвильове рівняння Шредінгера

У §2.2 ми встановили вид хвильової функції, що описує рух вільної частинки із заданим значенням імпульсу. Ця хвильова функція має вид плоскої хвилі де Бройля. Ми повинні тепер перейти до розгляду руху частинок у зовнішніх силових полях. Для цього необхідно знайти хвильову функцію, що описує рух частинки в заданому полі сил. Виявляється можливим встановити вид диференційного рівняння, якому задовольняє саме хвильова функція. Із вирішення самого рівняння може бути знайдена хвильова функція. Відмітимо перш за все, що рівняння для хвильової функції повинно бути лінійним. Дійсно, функції, що задовольняють нелінійному рівнянню, не відповідають, очевидно, вимогам принципу суперпозиції. Ясно, далі, що відома нам вже хвильова функція, яка описує рух вільної частинки, повинна бути вирішенням шуканого диференційного рівняння в окремому випадку відсутності поля. Знаходження лінійного диференційного рівняння, якому задовольняє плоска хвиля де Бройля

$$\psi(x, t) = A e^{i/\hbar (\vec{p}\vec{r} - Et)}, \quad (2.29)$$

не дуже важке. Для цього відмітимо, що  $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i/\hbar E \psi$ .

Крім того,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = - \frac{1}{\hbar^2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \psi.$$

Враховуючи, що для вільної частинки

$$\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} = E, \quad (2.30)$$

знаходимо

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)$$

Останнє рівняння прийнято записувати у вигляді

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi. \quad (2.31)$$

Знайдене лінійне диференціальне рівняння у часткових похідних має назву рівняння Шредінгера. Воно не містить будь-яких характеристик стану частинок, наприклад величини її імпульсу або енергії. У нього входить тільки маса частинки, а також універсальна стала  $\hbar$ . Рівнянню (2.31) задовольняє, очевидно, не тільки хвильова функція виду (2.29), що представляє хвильову функцію частинки із заданим значенням імпульсу, але й будь-які суперпозиції подібного виду хвильових функцій.

Рівняння Шредінгера має ту особливість, що воно є рівнянням першого порядку за часом і має множник  $i$ . Останнє означає, що хвильова функція повинна бути комплексною.

Відмітимо, що в якості хвильової функції вільної частинки, здається, можна було б визнати функцію, що описується (не комплексним) дійсним співвідношенням, наприклад, у вигляді біжучої хвилі  $\psi = A \cos \frac{1}{\hbar} (\vec{p}\vec{r} - Et)$ .

Проте при цьому ми не змогли б побудувати рівняння першого порядку за часом, вирішенням якого була б довільна суперпозиція таких функцій. Та обставина, що рівняння Шредінгера містить лише першу похідну від хвильової функції за часом, тісно пов'язана з виразом принципу причинності

у квантовій механіці. Дійсно, якщо б рівняння Шредінгера містило, наприклад, другу похідну від хвильової функції за часом, то для виявлення хвильової функції в довільний момент часу  $t$  було б недостатньо знати хвильову функцію в початковий момент часу, а необхідно було б задати в початковий момент часу також значення і першої похідної від хвильової функції за часом.

Серед рішень рівняння (2.31) є рішення, що гармонічно залежать від часу:

$$\psi(x, t) = \psi(x) e^{-i/\hbar Et} . \quad (2.32)$$

Підставивши (2.32) в (2.30), одержимо рівняння для функції, яка залежить тільки від координат частинки

$$\Delta \psi(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0 . \quad (2.33)$$

Останнє рівняння визначає функцію  $\psi(x)$  для вільної частинки. Проведемо узагальнення рівняння (2.33) на випадок частинки, що рухається в силовому полі. В основу цього узагальнення покладено таке припущення: енергія  $E$ , яка фігурує у рівнянні (2.33), означає кінетичну енергію частинки. Дійсно, при вільному русі кінетична енергія співпадає з повною. Якщо при шуканому узагальненні вважати енергію  $E$ , що фігурує в рівнянні (2.33), повною енергією, то хвильова функція, що описує рух електронів в силовому полі, не буде залежати від сил, що діють на частинку. Це було б, проте, нісенітницею. Таким чином, ми приходимо до висновку, що в рівнянні (2.33) під  $E$  необхідно розуміти кінетичну енергію частинки. Позначивши потенційну енергію частинки через  $U(x)$ , а повну — через  $E$ , одержимо

$$\Delta \psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(x)) \psi(x) = 0 . \quad (2.34)$$

Рівняння (2.34) означає шукане узагальнення хвильового рівняння Шредінгера у випадку частинки, що рухається в довільному потенційному полі, яке не залежить від часу. При цьому (2.34) визначає залежність

хвильової функції тільки від координат. Залежність від часу визначається співвідношенням (2.32).

Рівняння (2.34) називається рівнянням Шредінгера для стаціонарних станів. Дійсно, щільність ймовірності вимірювання координат частинки, яка знаходиться у стані (2.32), не залежить від часу:

$$|\psi(x,t)|^2 = |\psi(x,0)|^2. \quad (2.35)$$

Змінюючи за допомогою (2.32)  $E\psi$  на похідну за часом  $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ , прийдемо до загального хвильового рівняння Шредінгера:

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + U\psi, \quad (2.36)$$

де хвильова функція  $\psi$  залежить від координат  $x, y, z$  і часу  $t$ .

Хвильове рівняння Шредінгера (2.36) відіграє у квантовій механіці таку ж роль, що й рівняння Ньютона у класичній механіці. Його можна було б назвати рівнянням руху квантової частинки. Задати закон руху частинки в квантовій механіці – значить встановити значення  $\Psi$ -функції в кожний момент часу і в кожній точці простору.

Слід сказати, що проведене міркування не є виводом рівнянь Шредінгера у строгому значенні цього слова. Подібно до рівнянь Ньютона й Максвелла, рівняння Шредінгера стало, з одного - узагальненням відомих дослідних даних, а з другого боку, було великим науковим передбаченням.

Ми далі побачимо, як з рівняння Шредінгера впливає дискретність рівнів енергії. Буде також ясно, що рівняння Шредінгера задовольняє принципу відповідності. Справедливість рівняння Шредінгера і тлумачення змісту хвильової функції підтверджується величезним дослідним матеріалом сучасної атомної і ядерної фізики. Для одержання закону руху частинки – хвильової функції  $\Psi(x,t)$  – крім рівняння Шредінгера, повинні бути задані початкові й граничні умови. Оскільки рівняння Шредінгера є рівнянням першого порядку за часом, тому необхідно задати початкове значення хвильової функції системи  $\Psi(x,t)$ .



Задання  $\Psi(x,t)$  є характеристикою квантової частинки в такій же повній мірі, як, наприклад, задання траєкторії частинки в класичній фізиці.

Відмітимо ще, що в деяких задачах квантової механіки потенційну енергію зручно апроксимувати розривною функцією. У точці розриву потенційної енергії хвильова функція і її перші похідні повинні залишатися неперервними. Похідна від хвильової функції має стрибок тільки на поверхні нескінченно великого розриву потенційної енергії.

## 2.7. Частинка в одновимірній прямокутній потенційній ямі

Розглянемо загальні властивості рішень рівнянь Шредінгера на деяких найпростіших моделях. Візьмемо одновимірний рух частинки в потенційному полі, визначеному наступним чином:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < l \\ \infty & \text{при } x \leq 0, \quad x \geq l. \end{cases}$$

Подібне потенційне поле будемо називати нескінченно глибокою потенційною ямою. Ясно, що в такій ямі частинка може рухатися тільки в області простору  $0 \leq x \leq l$ .

На межі границі на частинку діє настільки велика сила, яка не дозволяє їй вийти зовні, так що частинка немов би заключена в деякій області простору, обмеженій ідеально відбиваючими стінками. На такому простому прикладі можна буде встановити ряд властивостей квантово - механічних систем. Суттєво, що ці властивості не пов'язані з моделлю, а мають загальний характер. Крім того, інтерес до цієї задачі визначається також тим, що модель використовується для грубого описування ряду систем, наприклад, електронів у металі або нуклонів у ядрі.

Вирішення рівняння Шредінгера треба написати у двох областях: за межами потенційної ями і всередині її. Оскільки частинка не може знаходитися зовні потенційної ями, її хвильова функція дорівнює 0 за

межами  $0 < x < l$ . З умови неперервності виходячи, що вона дорівнює нулю також в точках  $x=0$  і  $x=l$ , тобто

$$\Psi(0)=\Psi(l)=0. \quad (2.37)$$

Формула (2.37) служить граничною умовою для вирішення рівняння Шредінгера всередині потенційної ями.

В області  $0 < x < l$  рівняння Шредінгера для стаціонарних станів (2.34) має вигляд

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi. \quad (2.38)$$

Вирішення цього рівняння можна, очевидно, записати як

$$\Psi = A \sin(kx + \alpha), \quad (2.39)$$

де  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ . Використовуючи тепер граничні умови (2.37), із співвідношення  $\Psi=0$  при  $x=0$  слідує  $\alpha=0$  і умова  $\Psi(l)=0$  дає

$$kl = n\pi, \quad (2.40)$$

де  $n$  – будь-яке число, більше нуля. При  $n=0$  маємо  $\Psi=0$ , що означає відсутність частинки у всьому просторі. Умова (2.40) дозволяє знайти можливі значення енергії частинки:

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2. \quad (2.41)$$

Як бачимо, рівняння Шредінгера має рішення, що задовольняє граничним умовам тільки при дискретних значеннях квантового числа  $n$ . Таким чином, енергія частинки в безмежно глибокій потенційній ямі є квантованою. Дискретність енергії створилася природним чином, без будь-яких допоміжних припущень. У даному випадку вона стала безпосередньо впливати з граничних умов, які накладаються на хвильову функцію на кінцях проміжку інтегрування. Стан частинки з найменшою можливою енергією буде надалі називатися нормальним, або основним, всі інші стани – збудженими. Енергію нормального стану частинки в безмежно глибокій потенційній ямі одержимо з формули (2.41) при  $n=1$ :

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \quad (2.42)$$

Відмітимо, що значення мінімальної енергії частинки знаходиться відповідно до принципу невизначеності. Дійсно, невизначеність координати частинки  $\Delta x \sim l$ . Невизначеність імпульсу  $\Delta p$  порядку  $\hbar/l$ . Оскільки  $p \geq \Delta p$ , то мінімальна енергія частинки дорівнює

$$\frac{p^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2ml^2},$$

що за порядком величини збігається з (2.42).

Визначимо тепер відстань між сусідніми рівнями енергії ( $\Delta n=1$ ):

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n+1).$$

Відстань між рівнями збільшується зі зменшенням маси частинки. Наприклад, для електрона ( $m \sim 10^{-27}$  г), який знаходиться в області  $1 \sim 5 \cdot 10^{-8}$  см, знаходимо  $\Delta E \sim 1$  еВ. Навпаки, у випадку молекули з  $m \sim 10^{-23}$  г, що рухається, наприклад, в області  $1 \sim 10$  см, відстань між рівнями дорівнює  $\Delta E \sim 10^{-20}$  еВ. Ця відстань настільки мала, наприклад, у порівнянні з  $kT = 0,025$  еВ, що практично енергію молекули можна вважати неперервно змінною величиною.

Знайдемо відношення  $\frac{\Delta E_n}{E_n}$ , тобто відносну відстань між рівнями енергії: Ми бачимо, що  $\frac{\Delta E_n}{E_n} \sim \frac{1}{n}$  і наближається до нуля при дуже великих  $n$ . Дискретність квантових станів перестає проявлятися при великих квантових числах, фактично настає перехід до безперервних змін енергії.

Розглянемо докладніше властивості хвильових функцій частинки в потенційній ямі. Хвильова функція, що відповідає  $n$ -му рівню енергії, має вигляд

$$\Psi_n = A_n \sin \frac{\pi n}{l} x = A_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.43)$$

Сталу  $A_n$  визначимо з умови нормування

$$\int_0^l |\Psi_n|^2 dx = 1.$$

$$\text{Тоді } |A_n|^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = |A_n|^2 \int_0^l \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{2n\pi}{l} x) dx = |A_n|^2 \frac{l}{2} = 1,$$

Звідси

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{l}}. \quad (2.44)$$

Таким чином, значення сталої не залежить від квантового числа  $n$ .

Щільність ймовірності  $|\Psi|^2$  знаходження частинки в різних точках усередині ями ілюструє рис.2.2.

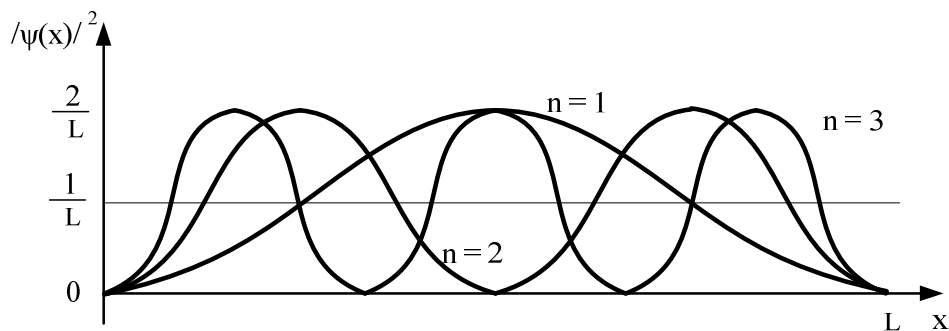


Рис. 2.2.

У класичній механіці частинка, що рухається в потенційній ямі, з рівною ймовірністю може знаходитися в будь-якій точці всередині ями (пряма на рис. 2.2). Справді, ймовірність  $dW_{\text{кл}}$  виявлення частинки в інтервалі  $dx$  пропорційна часу  $dt$  знаходження частинки в даному інтервалі:

$$dW_{\text{кл}} \sim dt = \frac{1}{v} dx.$$

Оскільки на частинку в середині ями ніякі сили не діють, вона рухається з постійною швидкістю  $v_i$ , таким чином  $dW_{\text{кл}}$  не залежить від  $x$ . При збільшенні квантового числа  $n$  (енергії частинки) максимуми розподілу ймовірностей намагаються зблизитися один з одним. У граничному випадку  $n \rightarrow \infty$  розподіл ймовірностей, що одержується з квантово - механічного

розрахунку, приводить до тих самих результатів, що й класичний розподіл. Це випливає з того, що функція  $\sin^2 \frac{\pi n}{l} x$  швидко осцилює при зміні  $x$  і при інтегруванні за будь-яким визначеним інтервалом може бути замінена на  $\frac{1}{2}$ . Таким чином, розгляд найпростішої квантово - механічної системи приводить нас до наступних наслідків, що мають, як ми пересвідчимось, загальний характер:

- 1) енергія мікрочастинки, що рухається в потенційній ямі, пробігає дискретний ряд значень;
- 2) і при  $E=E_1$  (нормальний стан) частинка не знаходиться у стані повного спокою з кінетичною енергією, що дорівнює 0;
- 3) дискретний характер енергетичних рівнів проявляється при малій масі й малих розмірах області, в якій відбувається рух;
- 4) при великих значеннях квантових чисел квантово - механічні співвідношення переходять у формули класичної фізики. Останнє твердження є частковим випадком загального принципу відповідності, з яким ми будемо ще неодноразово зустрічатися.

У подальшому при розгляді квантового осцилятора або атомних систем ми побачимо, що квантування станів може мати місце в системах, не обмежених будь-якими непроникливими стінками. Разом з тим ми побачимо, що наявність дискретних енергетичних станів не є обов'язковою прикметою квантово - механічних систем. У деяких випадках квантово - механічні системи мають неперервний характер.

## **2.8. Частинка у тривимірній прямокутній потенційній ямі**

Розглянемо більш складний випадок руху частинки у тримірній нескінченно глибокій потенційній ямі. Будемо вважати, що ділянка простору, в якому рухається частинка, визначається нерівностями  $0 < x < l_1$ ,  $0 < y < l_2$ ,  $0 < z < l_3$ .

Хвильове рівняння в цьому разі можна записати у вигляді

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = E \psi. \quad (2.45)$$

Граничні умови аналогічні (2.40) і мають вигляд

$$\psi(0, y, z) = \psi(x, 0, z) = \psi(x, y, 0) = \psi(l_1, y, z) = \psi(x, l_2, z) = \psi(x, y, l_3) = 0. \quad (2.46)$$

Вирішення рівняння (2.45) запишемо так:

$$\psi = B \sin k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z. \quad (2.47)$$

Підставимо  $\psi$  в рівняння і одержимо співвідношення

$$\frac{\hbar^2}{2m} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = E. \quad (2.48)$$

Із граничних умов (2.46) випливає

$$k_1 l_1 = n_1 \pi;$$

$$k_2 l_2 = n_2 \pi;$$

$$k_3 l_3 = n_3 \pi,$$

де  $n_1, n_2, n_3$  – цілі числа.

Підставивши значення  $k_1, k_2, k_3$  в (2.48) і (2.47), одержимо вираз для енергії і хвильової функції:

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left( \frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{n_2^2}{l_2^2} + \frac{n_3^2}{l_3^2} \right), \quad (2.49)$$

$$\psi_{n_1, n_2, n_3} = B \sin \frac{\pi n_1 x}{l_1} \sin \frac{\pi n_2 y}{l_2} \sin \frac{\pi n_3 z}{l_3}. \quad (2.50)$$

Стала  $B$  знову визначається з умови нормування

$$\int_V |\psi_{n_1 n_2 n_3}|^2 dx dy dz = 1$$

і дорівнює

$$B = \sqrt{\frac{8}{l_1 l_2 l_3}}. \quad (2.51)$$

Розглянемо, зокрема, частинку, що рухається в потенційній ямі кубічної форми, тобто випадок  $l_1=l_2=l_3=l$ . Енергія частинки в цьому випадку дорівнює

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2). \quad (2.52)$$

З формули (2.51) є очевидним, що одне й те саме значення енергії може бути за допомогою різних комбінацій чисел  $n_1$ ,  $n_2$  і  $n_3$ . Це означає, що декілька різних квантових станів з різними хвильовими функціями відповідають одному й тому ж значенню енергії. Такі рівні енергії називаються виродженими, а число різних станів, що відповідають даному рівню енергії, – кратністю виродження.

Розглянемо, наприклад, рівень енергії

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \cdot 6,$$

де  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 6$ . Оскільки кожне із  $n$  – ціле число, більше за нуль, то цій рівності можна задовольнити трьома різними комбінаціями чисел  $n_1$ ,  $n_2$  і  $n_3$ :

1.  $n_1=2, n_2=1, n_3=1$
2.  $n_1=1, n_2=2, n_3=1$
3.  $n_1=1, n_2=1, n_3=2$ .

Таким чином, даному рівню енергії відповідають 3 перед стани  $\Psi_{211}$ ,  $\Psi_{121}$ ,  $\Psi_{112}$ . Відповідно, кратність виродження даного рівня дорівнює 3.

З явищем виродження ми часто будемо зустрічатися при розгляді більш складних систем, наприклад, атомів.

## 2.9. Квантово - механічний осцилятор

Перейдемо до більш складних квантово - механічних систем і зупинимося на теорії лінійного осцилятора. Такий осцилятор представляє квантовий аналог частинки, яка виконує малі лінійні коливання біля

положення рівноваги. Прикладом таких малих коливань в атомних системах можуть служити малі коливання атомів у молекулі.

Не менш важливим прикладом може бути також тепловий рух кристала, який зводиться до сукупності лінійних гармонічних осциляторів. Із задачею про гармонічний осцилятор ми зустрічаємося також у квантовій електродинаміці, де довільне електромагнітне поле представляється у вигляді суперпозиції незалежних квантових осциляторів.

Наведені приклади свідчать, що теорія лінійного гармонічного осцилятора є однією з важливих задач квантової механіки.

Потенційна енергія лінійного гармонічного осцилятора визначається відомою формулою  $U = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ . Тому рівняння Шредінгера для лінійного гармонічного осцилятора має вигляд

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \Psi = E\Psi. \quad (2.53)$$

При його вирішенні зручно перейти до безрозмірних змінних

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x, \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}.$$

У нових позначеннях рівняння Шредінгера має вигляд

$$-\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \xi^2\Psi = \lambda\Psi. \quad (2.54)$$

Важливою відмінною рисою осцилятора від розглянутих прикладів є те, що в цьому випадку рух частинки не обмежений непроникною стіною. Тому в осцилятора немає граничних умов, подібних до (2.40). Єдиною умовою, що накладається на хвильову функцію осцилятора, є вимога її квадратичного інтегрування. Ми побачимо, що рівняння Шредінгера для осцилятора має вирішення, яке задовольняє останній умові тільки при деяких зовсім певних значеннях параметра  $\lambda$ . Ці значення називаються **власними значеннями** рівняння (2.53).

Для того, щоб з'ясувати загальний характер рішень останнього рівняння, розглянемо асимптотичну поведінку  $\Psi(\xi)$  при великих значеннях



аргументу  $\xi \gg x$ . При  $\xi \gg x$  в рівнянні (2.53) можна опустити  $\lambda\Psi$  в порівнянні з  $\xi^2\Psi$ . При цьому, очевидно, маємо

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} - \xi^2\Psi = 0. \quad (2.55)$$

Рішенням останнього рівняння, яке задовольняє вимогам обмеженості при великих  $\xi$ , служить функція

$$\Psi = A \xi^m e^{-\xi^2/2}, \quad (2.56)$$

де  $A$  – деяка стала і  $m$  – будь-яке кінцеве число.

Друге незалежне вирішення (2.56)  $\Psi \sim e^{-\xi^2/2}$  необмежено зростає при  $\xi \rightarrow \infty$ , і ним можна знехтувати.

Будемо шукати рішення рівняння (2.53) у вигляді

$$\Psi = e^{-\xi^2/2} f(\xi), \quad (2.57)$$

де  $f(\xi)$  – нова невідома функція, яка при  $\xi \rightarrow \infty$  поводить ся як  $\xi^m$ .

Якщо підставити (2.56) в (2.53), прийдемо до наступного рівняння для функції  $f$ :

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} - 2\xi \frac{df}{d\xi} + (\lambda - 1)f = 0. \quad (2.58)$$

Оскільки точка  $\xi=0$  не є особливою точкою рівняння (2.57), ви рішення цього рівняння будемо шукати у вигляді степеневого ряду

$$f(\xi) = \sum_{k=0} a_k \xi^k, \quad (2.59)$$

Похідні  $\frac{df}{d\xi}$  і  $\frac{d^2 f}{d\xi^2}$  мають вигляд

$$\frac{df}{d\xi} = \sum k a_k \xi^{k-1}, \quad (2.60)$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \sum k(k-1) a_k \xi^{k-2}, \quad (2.61)$$

Якщо підставити ряди (2.59) в рівняння (2.57), одержимо

$$\sum k(k-1) a_k \xi^{k-2} - 2\xi \sum k a_k \xi^{k-1} + (\lambda - 1) \sum a_k \xi^k = 0.$$

Для того, щоб степеневий ряд виду  $\sum_n c_n \xi^n$  тотожно дорівнював нулю, необхідно, щоб дорівнювали нулю всі коефіцієнти. Вважаючи всі коефіцієнти при  $\xi^k$  такими, що дорівнюють нулю, одержуємо рекурентну формулу

$$a_{k+2} = \frac{2k+1-\lambda}{(k+2)(k+1)} a_k, \quad (2.62)$$

Неважко бачити, що при  $\xi \rightarrow \infty$  такий ряд поводить ся як  $e^{\xi^2}$ , оскільки в цьому випадку суттєво великі  $k$  і (2.62) дає  $a_{k+2} \approx (2/k)^{a_k}$ . При цьому функція  $\Psi$  (2.57) необмежено збільшується. Але таке рішення повинно бути відкинуто.

## 2.10. Воднеподібний атом

Розглянемо вирішення квантово - механічної задачі про стан електрона в полі атомного ядра в атомі водню або в полі атомного залишку (іонного остова) в інших атомів з одним зовнішнім електроном.

Будемо вважати ядро (іонний остів) і електрон точковими зарядами  $(Ze \text{ і } -e)$ , які взаємодіють за законом Кулона. Таким чином, потенційна енергія матиме вид сферично-симетричного (кулонівського) поля притягіння:

$$U(r) = - \frac{Ze^2}{r} \quad (2.63)$$

Для атома водню і воднеподібних іонів  $z = 1$ . Таким чином, задача зводиться до вирішення рівняння Шредінгера для електрона в тривимірній потенційній ямі, яка має форму «кулонівської лійки» (рис. 2.3)

За нуль відліку енергії приймемо таку енергію системи, коли ядро і електрон знаход на нескінченно великій відстані один від одного. Практично вони повинні знаходитися на такій відстані, коли електрон можна вважати вільним. У цьому випадку говорять про іонізацію атома. Зв'язаним станом

електронів в атомі будуть відповідати від'ємні енергії ( $E < 0$ ), а вільно рухомому зовні атома електрону – позитивна енергія ( $E > 0$ ).

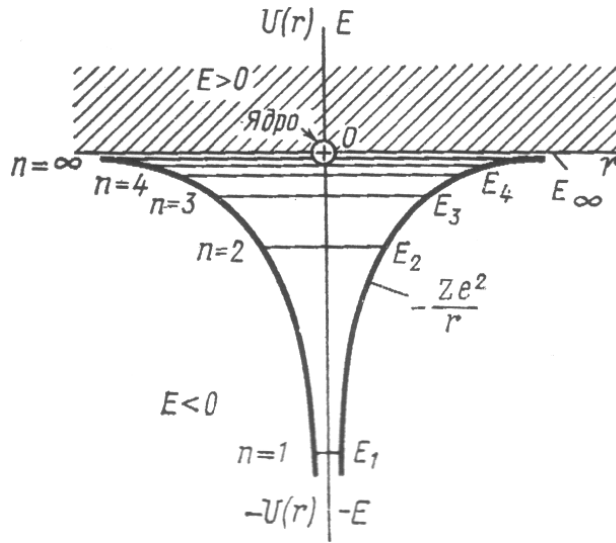


Рис. 2.3.

Запишемо рівняння Шредінгера у сферичній системі координат:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0 \quad (2.64)$$

Будемо шукати хвильову функцію  $\psi(\vec{r})$  у вигляді добутку трьох функцій:

$$\psi(\vec{r}) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi), \quad (2.65)$$

де  $R(r)$  - радіальна, а  $F(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$  - кутові частини хвильової функції.

Підставивши (2.65) в (2.64) і помноживши всі члени рівняння на

$r^2/RF$ , одержимо

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{r} \right) r^2 = - \frac{1}{F \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{F \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \quad (2.66)$$

де  $m_e$  - маса покою електрону

Оскільки ліва частина цього рівняння являє, собою функцію тільки від  $r$ , а права – тільки від кутів  $\theta$  і  $\varphi$ , то дорівнювати один одному за будь-яких  $r$ ,  $\theta$  і  $\varphi$  вони можуть лише тоді, коли кожна з частин є постійною величиною. Позначимо цю сталу розділення через  $\chi$ . Тоді одержуємо два рівняння:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[ \frac{2m_e}{\hbar^2} \left( E + \frac{ze^2}{r} \right) - \frac{\chi}{r^2} \right] R = 0; \quad (2.67)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \chi F = 0. \quad (2.68)$$

Вважаючи  $F(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ , повторимо цей же підхід розділення змінних, підставляючи  $F(\theta, \varphi)$  в рівняння (2.68), помножуючи всі члени на  $\sin^2 \theta / \Theta \Phi$  і потім введемо сталу розділення  $m^2$ . Тоді (2.68), в свою чергу, розпадається на два звичайних диференціальних рівняння:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( \chi - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0; \quad (2.69)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi. \quad (2.70)$$

Можна показати, що  $\chi = l(l+1)$ , де  $l$  - орбітальне квантове число ( $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ ), і що  $l \geq |m|$ , де  $m$  – магнітне квантове число ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm(l-1)$ ).

Ці рівняння добре вивчені, а  $F(\theta, \varphi)$  співпадає з відомими кульовими функціями  $Y_e^m(\theta, \varphi)$ . Тому залишається вирішити лише рівняння (2.67) для радіальної частин хвильової функції, підставивши в нього значення  $\chi = l(l+1)$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[ \frac{2m_e}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0. \quad (2.71)$$

Це рівняння після диференціювання за  $r$  можна записати у вигляді

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[ A + \frac{2B}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0, \quad (2.72)$$

де були введені наступні позначення:

$$A = 2m_e / \hbar^2, \quad B = m_e Z e^2 / \hbar^2.$$

Оскільки нас цікавлять зв'язані стани, для яких  $E = \left[ \frac{m_e v^2}{2} - \frac{Z e^2}{r} \right] < 0$ , то і  $A < 0$ .

Введемо безрозмірний радіус  $\rho = 2r / r_0$ , де  $r_0 = (A)^{-1/2}$ . В результаті помноження на  $r_0 / 4$  рівняння (2.73) набуде вигляду

$$R'' + \frac{2}{\rho} R' + \left[ \frac{B}{\sqrt{-A}} \frac{1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - \frac{1}{4} \right] R = 0, \quad (2.73)$$

де  $R' = dR / d\rho$ ,

Спочатку знайдемо асимптотичне вирішення рівняння (2.73), коли  $r \rightarrow \infty$  ( $\rho \gg 1$ ). При цьому рівняння суттєво спрощується:

$$R'' - R / 4 = 0. \quad (2.74)$$

Загальні рішення цього рівняння мають вигляд

$$R = C_1 \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right). \quad (2.75)$$

Оскільки хвильова функція  $\psi_0(\vec{r})$  повинна бути кінцевою при всіх значеннях  $r$ , включаючи  $r = \infty$ , то коефіцієнт  $C_2 = 0$ , тобто

$$R(\rho) = C_1 \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right). \quad (2.76)$$

Загальне вирішення рівняння (2.76), придатне за будь-яких значеннях  $\rho$ , а не тільки при  $\rho \rightarrow \infty$ , будемо шукати у вигляді добутку асимптотичного рівняння (2.76) на деякий поліном  $C(\rho)$ , який ще необхідно знайти. Таким чином, будемо вважати, що

$$R(\rho) = C(\rho) \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right). \quad (2.77)$$

Підставивши (2.77) в (2.73), одержимо

$$C'' + \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)C' + \left[\left(\frac{B}{\sqrt{-A}} - 1\right)\frac{1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]C = 0. \quad (2.78)$$

Це рівняння має несуттєво особливу точку  $\rho = 0$ . Тому його вирішення будемо шукати у вигляді полінома

$$C(\rho) = \rho^l \sum_{\mu=0} b_{\mu} \rho^{\mu} = \sum_{\mu=0} b_{\mu} \rho^{(\mu+l)}. \quad (2.79)$$

Знайдемо  $C'(\rho)$  і  $C''(\rho)$ :

$$C'(\rho) = \sum_{\mu} b_{\mu} (\mu + l) \rho^{\mu+l-1}; \quad (2.80)$$

$$C''(\rho) = \sum_{\mu} b_{\mu} (\mu + l)(\mu + l - 1) \rho^{\mu+l-2}; \quad (2.81)$$

Підставимо вирази (2.80), (2.81) в рівняння (2.78) (при цьому перевизначимо індекси  $\mu \rightarrow (\mu + 1)$ ) і одержимо:

$$\sum_{\mu} \left\{ b_{\mu} [(\mu + l + 1)(\mu + l + 2) - l(l + 1)] - b_{\mu} \left[ (\mu + l + 1) - \frac{B}{\sqrt{-A}} \right] \right\} \rho^{l+\mu-1} = 0 \quad (2.82)$$

Щоб цей поліном дорівнював нулю, необхідно коефіцієнти при всіх ступне  $\rho$  прирівняти нулю, тобто одержимо рекурентне співвідношення для коефіцієнтів ряду

$$b_{\mu+1} = b_{\mu} \frac{(l + \mu + 1) - \frac{B}{\sqrt{-A}}}{(\mu + l + 1)(\mu + l + 2) - l(l + 1)}. \quad (2.83)$$

Ряд (2.79) повинен мати будь-яке, але кінцеве число членів. Тільки в цьому випадку хвильова функція  $R(\rho)$  не буде дорівнювати нескінченності при  $\rho \rightarrow \infty$ , оскільки експоненціальний множник  $\exp\left(-\frac{\rho}{2}\right)$  в (2.76) буде змінюватися швидше, ніж будь-яка, але кінцева ступінь  $\rho^{\mu}$ .

Для того, щоб ряд (2.79) був поліномом, необхідна і достатня рівність нулю чисельника в (2.83) при деякому значенні  $\mu = \mu'$ . Звідси

$$\frac{B}{\sqrt{-A}} = l + \mu' + 1 \quad (2.84)$$

Підставивши значення  $A$  і  $B$ , одержимо вираз для власних значень енергії електрона в атомі:

$$E_{\mu'} = -\frac{me^4 Z^2}{2\hbar^2} \frac{1}{(\mu' + l + 1)^2}, \quad (2.85)$$

або

$$E_n = -\frac{m_e e^4 Z^2}{2\hbar^2 n^2} \quad (2.86)$$

де  $n = \mu' + l + 1$  - ціле число, більше нуля ( $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$ ).

Дійсно, так як  $\mu' \geq 0$ , а  $l$  ціле число ( $l = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ ), то  $n \geq l$ . При цьому  $l = (n - 1 - \mu') \leq (n - 1)$ . Число  $n$  - називається головним квантовим числом, а число  $\mu' = n_r = (n - l - 1)$  - радіальним квантовим числом.

Таким чином, послідовне вирішення рівняння Шреденгера, без будь-яких допоміжних гіпотез про характер руху електрона в атомі, дозволяє теоретично одержати дискретний енергетичний спектр енергії воднеподібного атома.

Формула (2.86) вперше була одержана Н.Бором з чисто інтуїтивних міркувань, на основі постулату про особливі стаціонарні (квантові) стани, в яких може знаходитися атом.

Використовуючи атомні одиниці ( $e = 1$ ,  $m = 1$ ,  $\hbar = 1$ ), які особливо зручні у випадку кулонівського поля, можна записати формулу (2.86) в компактній формі:

$$E_n = -Z^2 / 2n^2, \quad (2.87)$$

Нормальному (основному) рівню атома водню ( $Z = 1$ ) відповідає  $n = 1$ :

$$E_1 = -1R_y = -13,6eV \quad (2.88)$$

де  $1R_y$  (один рідберг) дорівнює  $m_e e^4 / 2\hbar^2 = 2,179 \cdot 10^{-18}$  Дж.

Із зростанням  $n$  відстань між рівнями зменшується, рівні згущаються при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta E \rightarrow 0$  і дискретний спектр переходить в неперервний.

## Список літератури

1. Шпольский Э.В т. 1.2.,- М.: Наука, 1974,
2. Фридрихов С.А., Мовнін С.М., Физические основы электронной техники, М., Высшая школа, 1982, - 608с.

## Питання для самоперевірки

1. Що таке хвилі де Бройля?
2. Написати співвідношення де Бройля.
3. Які були експерименти для доказу хвильової природи мікрочастинок?
4. У чому особливість вимірювань у квантовій механіці?
5. У чому полягає принцип Гейзенберга?
6. Який фізичний сенс хвильової функції?
7. Яким вимогам повинна відповідати хвильова функція?
8. Що описує рівняння Шредінгера, який його фізичний сенс?
9. Чому дорівнює групова швидкість хвиль де Бройля?
10. У чому головна відмінність енергетичного спектру частинки в потенційній ямі від спектру вільної частинки?
11. Яке поле називається центральносиметричним?
12. Якими квантовими числами характеризується стан електрона в атомі водню?
13. Який енергетичний спектр мікрочастинки в зв'язаному стані?
14. У чому полягає дуальність світла?
15. Що таке корпускулярно-хвильовий дуалізм?



### 3. ЗОННА ТЕОРІЯ ТВЕРДИХ ТІЛ

#### 3.1. Колективізація електронів в кристалі

У твердому тілі відстані між атомами настільки малі, що кожен з них опиняється в досить сильному електромагнітному полі сусідніх атомів. Розглянемо наступний ідеалізований приклад.

Розташуємо  $N$  атомів натрію у вигляді просторової ґрати, властивій кристалу натрію, але на таких великих відстанях  $r$  один від одного, щоб взаємодією між ними можна було знехтувати. У цьому випадку енергетичний стан електронів у кожному із них можна вважати таким, як і в окремо взятому ізолюваному атомі. На рис. 3.1, а показана енергетична схема двох ізолюваних атомів натрію. Кожний атом зображений у вигляді потенційної ями, в середині якої проведені енергетичні рівні:  $1s$ ,  $2s$ ,  $2p$ ,  $3s$  і так далі. Рівні  $1s$ ,  $2s$ ,  $2p$  укомплектовані в натрію повністю, рівень  $3s$  – наполовину, рівні, розташовані вище  $3s$ , – вільні.

На рис. 3.1 видно, що ізолювані атоми відокремлені один від одного потенційними бар'єрами шириною  $r$ . Висота бар'єра для електронів, які знаходяться на різних рівнях, різна. Вона дорівнює відстані від цих рівнів до нульового рівня  $00$ . Потенційний бар'єр перешкоджає вільному проходу електронів від одного атома до іншого.

У верхній частині рис. 3.1 показана якісна картина розподілу щільності ймовірності знаходження електронів на даній відстані від ядра. Максимуми цих кривих відповідають приблизно положенню борівських орбіт зон цих електронів.

Тепер піддамо ґратку повільному однорідному стисканню, не порушуючи її симетрії. У міру зближення атомів взаємодія між ними зростає і на відстанях, рівних параметру ґраток, досягає нормальної величини. На рис. 3.1, б показана картина, що відповідає такому зближенню атомів.

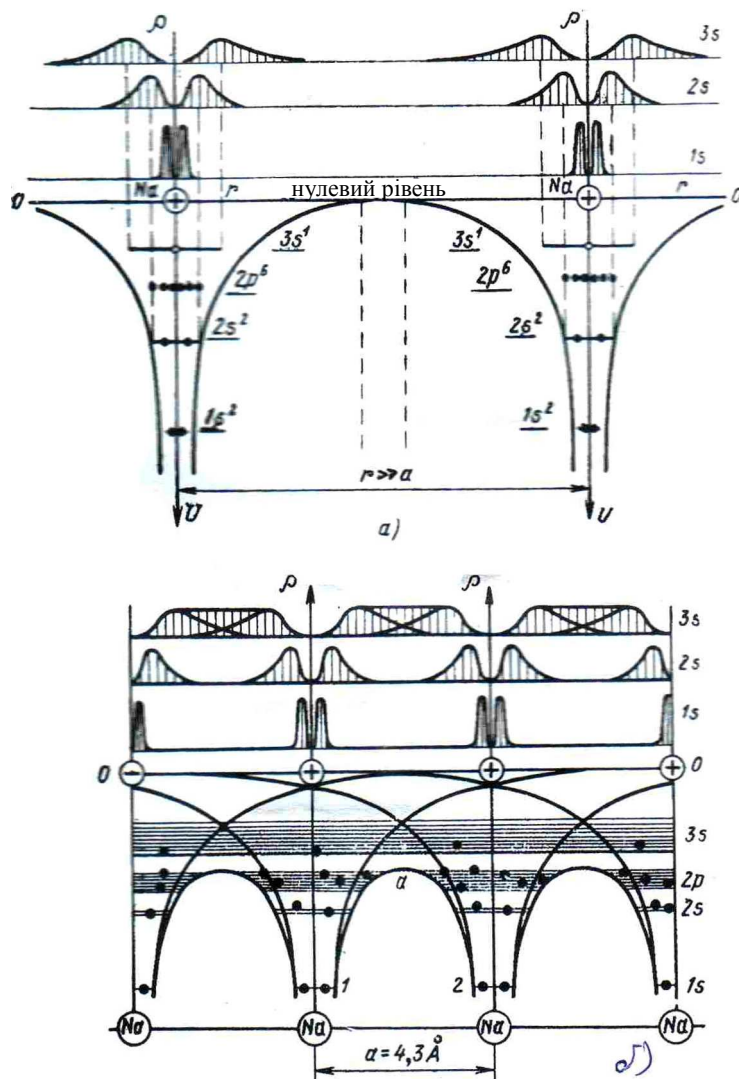


Рис.3.1 - Зміна стану електронів при зближенні атомів:

- а) – енергетична схема атомів натрію, віддалених на відстань, значно більшу параметру ґраток;
- б) - енергетична схема атомів натрію, зближених на відстань порядку параметра ґраток.

Видно, що потенційні рівні, які відокремлюють сусідні атоми, частково перекриваються і дають результуючу потенційну криву 1а2 яка проходить нижче нульового рівня 00. Це означає, що зближення атомів викликає зменшення не тільки ширини бар'єра, але і його висоти. Цікаво, що ця висота виявляється навіть дещо нижче початкового положення рівня валентних електронів 3s. Тому валентні електрони одержують можливість практично без перешкод переходити від одного атома до іншого. Про це свідчить характер хвильової функції цих електронів: вони перекриваються настільки сильно, що дають електронну хмару практично рівномірної густини, що

відповідає стану повної колективізації валентних електронів, при якому ймовірність виявлення їх в будь-якому місці ґраток зовсім однакова. У той же час електронні хмари внутрішніх оболонок атома в кристалі залишаються практично такими, як і в ізольованих атомах.

Колективізовані електрони часто називають вільними. Слід пам'ятати про відносність цього поняття: електрон вивільнився від конкретного атома, але залишився в “полоні” у кристала і таким чином не є повністю вільним. Не слід розглядати такий електрон також, примітивно вважаючи, що він спочатку “покрутився” біля одного ядра, потім біля іншого і т.д.

Колективізація є прямим наслідком фізичної еквівалентності іонів ґраток, тому кожний електрон “належить” одночасно всім іонам ґраток і з рівною ймовірністю може бути знайдений поблизу будь-якого з них. Такі електрони утворюють у кристалі електронний газ.

### **3.2. Зонний характер енергетичного спектра електронів у кристалі.**

#### **Адіабатичне і одноелектронне наближення**

Подібно до того, як основним завданням теорії атома є опис стану електронів в атомі і обчислення дозволених рівнів енергії, які вони можуть зайняти, одним з основних завдань теорії твердого тіла є визначення енергетичного спектра стаціонарних станів колективізованих електронів у кристалі. У загальному випадку це завдання є безнадійно складним і вирішення досягається шляхом ряду припущень. Перше спрощення засноване на тому, що маса ядер значно більша маси електронів, внаслідок чого швидкість їх руху значно нижче швидкості руху електронів. Оскільки за час, необхідний для зміни стану електронів, стан ядер залишається практично незмінним, то кристал можна розглядати як систему, що складається з двох незалежних підсистем – швидких електронів і практично нерухомих ядер і таким чином задачу про систему ядер і електронів можна звести до простої

задачі про стан тільки електронів в заданих ґратах із ядер. Таке наближення називається адіабатичним .

Адіабатичне наближення, спрощуючи задачу, не знімає проте основної труднощі її вирішення: задача все-таки залишається задачею багатьох тіл. Для того, щоб звести її до одноелектронної задачі, роблять такі припущення. Замість того, щоб розглядати взаємодію даного електрона з кожним з інших електронів системи, вважають, що цей електрон рухається в деякому результуючому полі, створеному іншими електронами і не залежними від миттєвого положення даного електрона. Це дозволяє розглядати рух кожного електрона незалежно від всіх інших і описувати його одноелектронним рівнянням Шредінґера:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi - U \cdot \psi = E \cdot \psi, \quad (3.1)$$

де  $U$  – потенційна енергія електрона в полі іонів ґраток та інших електронів;  $E$  – його повна енергія.

Таке наближення називається одноелектронним. Воно лежить в основі теорії твердих тіл.

Незважаючи на значні спрощення, які досягаються одноелектронним наближенням, точне вирішення рівняння Шредінґера (3.1) все ще є дуже складним. Тому для визначення характеру енергетичного спектру електронів в кристалі були розроблені наближені методи вирішення цих рівнянь.

Ми зупинимося коротко на трьох з них: наближення дуже зв'язаних електронів, наближення вільних електронів, і наближення слабо зв'язаних електронів.

Щоб зрозуміти фізичний сенс цих наближень, звернемося до рис. 3.1, б. З нього видно, що в кристалі є області, де потенціал ґраток міняється дуже різко, і області, де він міняється слабо. Перші з них розташовані безпосередньо поблизу ядер. На їх частку приходить відносно невеликий об'єм кристалу (порядку 10-15%). Електричне поле в цих областях практично таке ж, як і в ізольованих атомах.

Області, де потенціал міняється слабо, розташовані між ядрами. На їх частку приходить основний об'єм кристалу.

Відповідно до цього при виборі потенційної енергії  $U(r)$  в рівнянні Шредінгера (3.1) об'єм кристала зручно ділити на дві частини:

1) На області із слабким полем, в яких

$$U(r) = U_0 + \delta U(r), \quad \delta U(r) \ll U_0, \quad (3.2)$$

де  $U_0(r) = \text{const}$  – представляє собою потенціальну енергію електрона в полі позитивних іонів у припущенні, що це поле скомпенсоване полем всіх інших електронів, крім даного;

$\delta U(r)$  враховує неповну локальну компенсацію поля іонів електронами. Вона має періодичний характер з періодом, рівним сталій ґраток.

1) На області з сильним полем, в яких

$$U(r) = U_a + \delta U(r), \quad \delta U(r) \ll U_a \quad (3.3)$$

де  $U_a$  – потенційна енергія електрона в ізольованому атомі. Вона є періодичною функцією з періодом, рівним сталій ґраток,  $\delta U(r)$  – поправочний член, що враховує вплив на цю енергію сусідніх вузлів ґраток.

Із рис. 3.1, б видно, що хвильові функції електронів, які мають різні енергії, мають різний характер локалізації в об'ємі кристалу. Хвильові функції внутрішніх сильнозв'язаних електронів локалізовані поблизу ядер і вже на незначній відстані від них практично дорівнюють нулю. Тому для опису таких електронів доцільно користуватися потенційною функцією (3.3).

Наближений розгляд стану електронів у кристалі, з використанням потенційної функції (3.3) називається наближенням сильнозв'язаних електронів.

Електронні хмари зовнішніх валентних електронів, навпаки, розмазані по об'єму всього кристалу майже з рівномірною густиною. Оскільки в переважній частині об'єму кристалу електричне поле є слабким, то при описі стану таких електронів доцільно користуватися потенційною функцією (3.2). Наближений розгляд стану електронів у кристалі, який виходить із

потенційної функції (3.2), називається наближенням слабо зв'язаних електронів.

Якщо у виразі (3.2)  $\delta U(r)$  покласти рівним нулю, тобто вважати потенціал ґрати сталим, то одержуємо наближення вільних електронів, оскільки таке поле не буде чинити ніякого впливу на характер руху електронів у кристалі.

### 3.3. Наближення сильно зв'язаних електронів

Якщо в потенційній функції (3.3) знехтувати незначним поправочним членом, який враховує вплив на електрон сусідніх вузлів ґраток (нульове наближення), то в якості хвильової функції і енергії електрона розташованого біля даного вузла ґраток, необхідно взяти хвильову функцію  $\psi_a$  і енергію  $E_a(n,l)$  електрона в ізолюваному атомі:

$$\psi(r) = \psi_a, \quad E = E_a(n,l),$$

де  $n, l$  – головні й орбітальні квантові числа, які визначають енергію електрона в атомі.

Різниця між кристалом і окремим атомом полягає в наступному. В той час як в ізолюваному атомі даний енергетичний рівень  $E_a(n,l)$  є єдиний у кристалі, що складається з  $N$  атомів, в нульовому наближенні він повторюється  $N$  разів. Інакше кажучи, кожний енергетичний рівень ізолюваних атомів у кристалі за нульового наближення є  $N$  – кратно виродженням. Таке виродження називається перестановочним.

Враховуємо тепер поправочний член  $\delta U(r)$  в потенційній функції (3.3). У міру зближення ізолюваних атомів і утворення з них ґраток кожний атом попадає у все більш зростаюче поле своїх сусідів, з якими він взаємодіє.

Така взаємодія приводить до зняття виродження, в тому числі перестановочного. У результаті цього енергетичний рівень невироджений в вільному атомі, буде розщеплений на  $N$  близько розташованих один від одного підрівнів, що утворюють енергетичну зону. Якщо енергетичні рівні в

атомі малі ( $2l + 1$ ) – кратне виродження (без урахування спіна), то відповідні їм енергетичні зони будуть складатися з  $N(2l+1)$  підрівнів. Так рівень  $s$  дає зону, що складається з  $N$  підрівнів і здатну вмістити  $2N$  електронів рівень  $p$  дає зону, що складається з  $3N$  підрівнів і здатну вмістити  $6N$  електронів і т.д.

Відстань між підрівнями в зоні для кристалів звичайних розмірів дуже мала. У кристалі в  $1\text{см}^3$  міститься  $N \approx 10^{22}$  атомів. При ширині зони порядку  $1\text{eV}$  відстань між рівнями в ній дорівнює  $\approx 10^{-22}$  eV. Ця відстань настільки мала, що їх, можна вважати фактично неперервними. Проте той факт, що число рівнів у зоні є все таки кінцевими, відіграє важливу роль у визначенні характеру розділу електронів за станами.

Найбільший вплив поле ґраток може спричинити, очевидно, на зовнішні електрони атомів. Тому стан цих електронів у кристалі зазнає, найбільших змін, а електричні зони, утворені з енергетичних рівнів цих електронів, виявляються найбільш широкими. Внутрішні ж електрони, сильно зв'язані з ядром, відчують лише незначну збурюючу дію від сусідніх атомів, внаслідок чого їх енергетичні рівні в кристалі залишаються практично майже такими ж вузькими, як і в ізолюваних атомах. На рис. 3.2 показана схематична картина утворення енергетичних зон у кристалі з дискретних атомних рівнів.

Таким чином, кожному квантовому рівню ізолюваного атома, який характеризується квантовими числами  $n, l$ , у кристалі відповідає зона дозволених рівнів стану  $1s$  – зона  $1s$ , стану  $2p$  – зона  $2p$ .

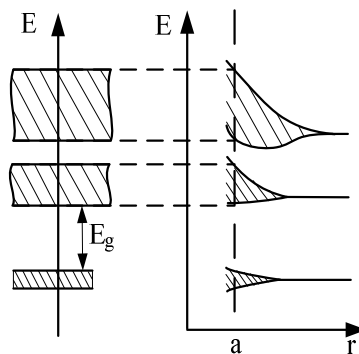


Рис.3.2 - Утворення енергетичних зон з атомних рівнів ( $a$  – параметр ґраток).

Зони дозволених енергій розділені областями заборонених енергій – забороненими зонами. Із збільшенням енергії електрона в атомі ширина дозволеної зони збільшується, ширина забороненої – зменшується.

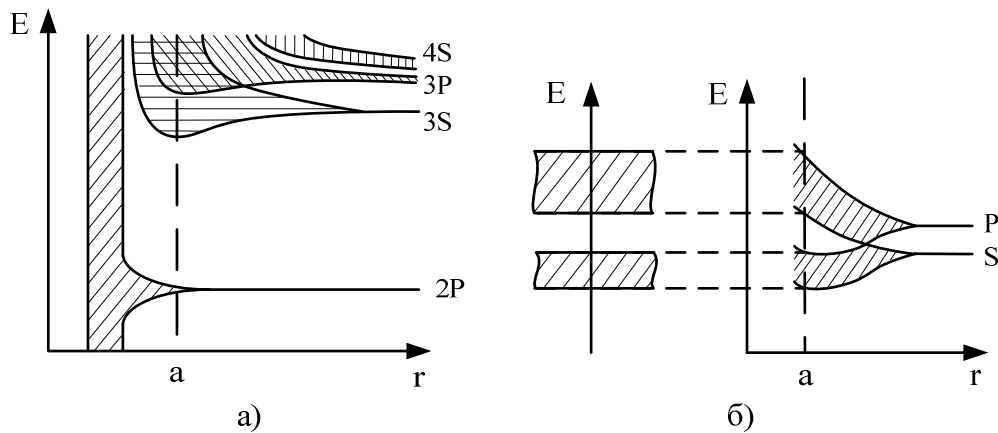


Рис. 3.3. Енергетичні зони:

а) кристала натрію;

б) алмазоподібних елементів четвертої групи таблиці Менделєєва (а – параметр ґраток).

В якості прикладу на рис. 3.3, а, б наведені енергетичні зони натрію і хімічних елементів, що мають структуру алмазу (алмаз, кремній, германій).

У кристалі натрію рівень 2р і більш низькі рівні не одержують помітного розширення, залишаючись практично такими ж, як і в ізольованих атомах. Рівень же  $3s^1$  розщеплюється в зону 3s. Як видно з рис. 3.3, а, ця зона переривається із зоною 3р, утворюючи змішану (гібридну) зону.

Дещо інакше проходить утворення зон у хімічних елементів з структурного алмазу (рис.3.3,б). Тут зони утворені з рівнів s і p, перекриваючись, розділяються на дві зони так, що в кожній з них містяться по чотири стани на атом: один S – стан і три p – стани. Ці зони розділені забороненою зоною.

### 3.4. Наближення вільних електронів

У наближенні вільних електронів потенціал ґраток вважається постійним. Тому з енергетичної точки зору кристал проявляє, собою



потенціальний ящик з гладким дном. При цьому рух електрона описується плоскою хвилею

$$\psi(r) = ce^{\vec{i}\vec{k}\vec{r}} = ce^{i(xk_x + yk_y + zk_z)}, \quad (3.4)$$

де

$$k_x = n_x \frac{2\pi}{L}, \quad k_y = n_y \frac{2\pi}{L}, \quad k_z = n_z \frac{2\pi}{L}, \quad (3.5)$$

$n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, L$  – лінійний розмір ящика, який має форму куба.

Енергія електрона є квадратичною функцією хвильового вектора:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (3.6)$$

В одновимірному випадку графічної функції  $E(k_x)$  є парабола з мінімумом в точці  $k_x = 0$  (рис.3.4, а). У тривимірному випадку рівняння (3.6) являє собою рівняння сфери.

Тому поверхнями рівних енергій (ізоенергетичними поверхнями) в просторі хвильових векторів  $k_x, k_y, k_z$ , є сфери з центром в точках  $k_x, k_y, k_z = 0$  (рис. 3.4,б).

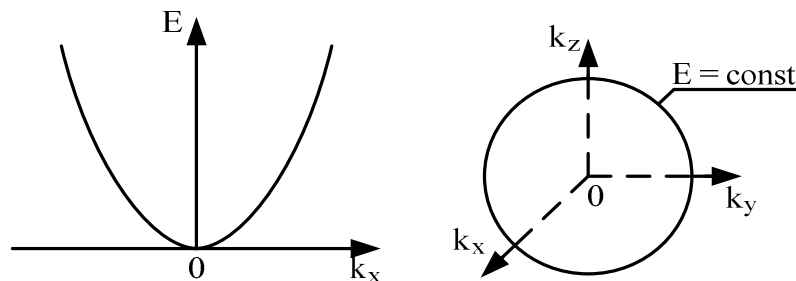


Рис. 3.4 - Залежність енергії вільних електронів від хвильового вектора:

а – для одновимірного випадку; б – для тривимірного випадку.

### 3.5. Наближення слабкозв'язаних електронів

Наближення слабкозв'язаних електронів виходить з потенціальної функції (3.2), в якій  $U_0(r)$  є постійним величиною  $\delta U(r) \ll U_0(r)$  – періодичною функцією з періодом, рівним постійним граткам. Тому моделі кристалу в такому наближенні можна представити у вигляді тривимірного

потенціального ящика зі слабо рифленим дном. На рис. 3.5 показана одновимірна модель такого кристалу.

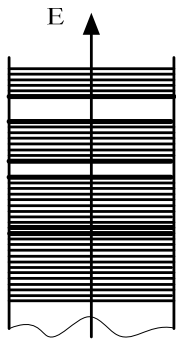


Рис.3.5 - Одновимірна модель потенціального ящика з рифленим дном.

Оскільки потенціал ґраток в наближенні слабкозв'язаних електронів мало відрізняється від потенціалу ґраток в наближенні вільних електронів, то треба шукати вирішення рівняння Шредінгера і в цьому випадку у вигляді плоских хвиль (3.4). Проте наявність періодично змінної складової потенціала ґраток повинна змінити це рішення так, щоб воно стало також періодичною функцією з періодом, рівним сталій ґраток, тому що тільки в цьому

разі  $\psi(r)$  правильно буде виражати періодично повторюваний розподіл густини електронних хмар в ґратках кристалу.

Таким чином, з властивостей періодичності поля кристалу випливає, що вирішення рівняння Шредінгера (3.1) повинно мати наступний вигляд:

$$\psi(\vec{r}) = U(\vec{r})e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (3.7)$$

де  $U(\vec{r})$  – просторово періодична функція з періодом, рівним сталій ґраток.

Рівняння (3.7), яке виражає загальний вигляд хвильової функції електрона, що знаходиться в періодичному полі кристалу, називається функцією Блоха. Вона являє собою рівняння плоскої хвилі, амплітуда якої модульована множником  $U(r)$ , з періодом, рівним сталій ґраток. Конкретний вигляд функції  $U(\vec{r})$  визначається видом потенціальної функції  $U(\vec{r})$ , яка входить у рівняння Шредінгера.

Для більш повної ілюстрації методу слабого зв'язку і встановлення характеру енергетичного спектру колективізованих електронів у кристалі, який випливає із цього наближення, звернемося до найпростішої моделі лінійного кристалу, вперше розглянутій Кронігом і Пенні.

### 3.6. Модель Кроніга – Пенні

У моделі Кроніга–Пенні розглядається рух електрона в лінійному ланцюгу прямокутних потенціальних ям, показаних на рис. 3.6.

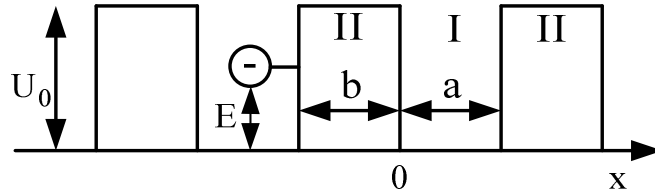


Рис. 3.6 - Модель Кроніга – Пенні

Ширина ям дорівнює  $a$ . Ями відокремлені одна від одної потенціальними бар'єрами товщиною  $b$  і висотою  $U_0$ . Довжина ланцюжка дорівнює  $L$ , стала ґраток  $c = a + b$ .

Нехай енергія електрона  $E$ , який знаходиться в такому полі, менше висоти бар'єра. Його стан описується рівнянням Шредінгера:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \quad (3.8)$$

Вирішення цього рівняння має наступний вигляд:

– для областей  $I$ , в яких  $U=0$

$$\psi_1(x) = A \cdot e^{i\alpha x} + B \cdot e^{-i\alpha x}; \quad (3.9)$$

– для областей  $II$ , в яких  $U = U_0$

$$\psi_2(x) = C \cdot e^{\beta x} + D \cdot e^{-\beta x}, \quad (3.10)$$

$$\text{де } \alpha = \sqrt{2mE / \hbar^2}; \quad \beta = \sqrt{2m(U_0 - E) / \hbar^2}, \quad (3.11)$$

$A, B, C, D$  – сталі коефіцієнти.

Підставимо  $\psi_1(x)$  і  $\psi_2(x)$  у функцію Блоха:

$$\psi(x) = U(x) \cdot e^{ikx}, \quad (3.12)$$

знайдемо конкретний вид періодичної функції  $U(x)$  в областях  $I$  і  $II$

$$\begin{aligned} U_1(x) &= A \cdot e^{i(\alpha-k)x} + B \cdot e^{-i(\alpha+k)x}, \\ U_2(x) &= C \cdot e^{(\beta-ik)x} + D \cdot e^{-(\beta+ik)x}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для визначення коефіцієнтів А, В, С, D використовується той факт, що функція  $U(x)$  і її перша похідна є неперервними в місцях стрибка потенціала (наприклад в точці  $x = 0$ )

$$U_1(0) = U_2(0), \quad \left( \frac{dU_1}{dx} \right)_{x=0} = \left( \frac{dU_2}{dx} \right)_{x=0} \quad (3.14)$$

і мають властивості періодичності з періодом, рівним  $(a + b)$ :

$$U_1(a) = U_2(-b), \quad \left( \frac{dU_1}{dx} \right)_{x=a} = \left( \frac{dU_2}{dx} \right)_{x=-b}. \quad (3.15)$$

Підставивши в (3.14) і (3.15)  $U_1(x)$  і  $U_2(x)$  одержимо чотири рівняння. Для того, щоб ця система мала рішення для А, В, С, D, відмінні від нуля, визначник системи повинен дорівнювати нулю. Ця вимога приводить до рівняння

$$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta} sh\beta \cdot \sin \alpha a + chb \cdot \cos \alpha a = \cos k(a + b). \quad (3.16)$$

З метою подальшого спрощення задачі розглянемо наступний граничний випадок. Будемо зменшувати ширину бар'єра, тобто  $b \rightarrow 0$ , в той же час збільшувати їх висоту:  $U_0 \rightarrow \infty$ , причому так, щоб добуток  $bU_0$ , який ми позначимо через  $\frac{\hbar^2}{ma} P$ , залишався постійним. Параметр

$$P = \frac{ma}{\hbar^2} b U_0, \quad (3.17)$$

характеризує прозорість бар'єра.

Легко показати, що для такого граничного випадку рівняння (3.16) набуде наступного вигляду:

$$\frac{P \sin \alpha a}{\alpha a} + \cos \alpha a = \cos ka. \quad (3.18)$$

Це рівняння виражає залежність енергії електрона  $E$ , яка входить до змінної  $\alpha$ , від хвильового вектора  $\vec{k}$  (для бар'єрів різної прозорості  $P$ ).

На рис. 3.7, а наведено графічне вирішення рівняння (3.18). Оскільки  $\cos ka$  не може бути більше 1 і менше -1, то  $\alpha a$  може прийняти тільки такі значення, при яких ліва частина цього рівняння не виходить за межі  $\pm 1$ . Ці

значення на рис. 3.7, а заштриховані відповідно до формули (3.11), вони визначають області дозволених енергій електрона – енергетичні зони.

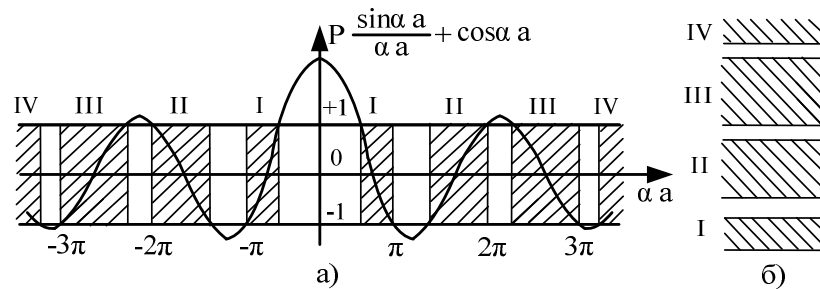


Рис. 3.7 - Графічне вирішення рівняння (3.18) і енергетичний спектр електрона.

Ці зони відділені одна від одної смугами заборонених енергій – забороненими зонами. Їм відповідають області значень  $\alpha a$ , в яких ліва частина рівняння (3.18) повинна бути більше +1 або менше -1, що заборонено правою частиною цього рівняння.

Із рис. 3.7 а, видно далі що із збільшенням енергії електрона ширина дозволених зон збільшується, ширина заборонених зон зменшується (рис.3.7,б).

Ширина зон залежить також від параметра  $P$ .

При  $P \rightarrow \infty$  дозвалені зони звужуються, перетворюючись в дискретні рівні, які відповідають умові  $\alpha a = n\pi$ , де  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ , тобто до значень, відповідаючим ізольованій потенціальній ямі. При  $P \rightarrow 0$ , навпаки, зникають заборонені зони і електрон стає вільним.

На рис.3.8 показаний графік залежності енергії електрона від хвильового вектора  $\vec{k}$  побудований за рівнянням (3.18). Штрих – пунктуальною лінією зображена залежність  $E(k)$  для вільного електрона.

Із рис. 3.8 видно, що всередині кожної зони енергія електрона неперервно зростає з ростом хвильового вектора. При значеннях

$$k = n \frac{\pi}{a}, n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.19)$$

енергія терпить розрив, який приводить до утворення заборонених зон.

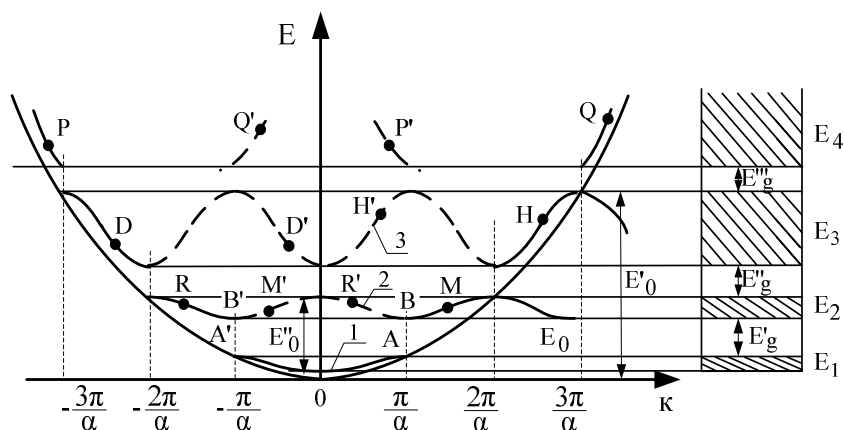


Рис. 3.8 - Залежність енергії електрона від хвильового вектора для моделі Кроніна – Пенні

Якщо в (3.19)  $k$  виразити через довжину хвилі:  $k = n \frac{\pi}{\lambda}$ , то вона прийме наступний вигляд:

$$n\lambda = 2a \quad (3.20)$$

Це відома формула Вольфа – Бреґга, яка виражає умову відбиття хвилі від площини ґрати для випадку, поки падіння дорівнює  $90^\circ$ . Таким чином розриви в енергетичному спектрі електрона в кристалі виникають при виконанні умови бреггівського відбиття електронних хвиль від площин ґрати. Електрони з такою довжиною хвилі перетерплюють повне внутрішнє відбиття і розповсюджуватися в кристалі не можуть.

Можна показати, що на границях зон похідна

$$\left( \frac{dE}{dk} \right)_{zp} = 0 \quad (3.21)$$

а енергія  $E(k)$  поблизу границь зон є квадратичною функцією хвильового вектора  $\vec{k}$ , відрахованого від цих границь:

$$E = E_0 + Ak^2 \quad (3.22)$$

де  $E_0$  – енергія відповідаюча границі зони. Так як всередині зони функція  $E(k)$  є монотонною зростаючою, то умова (3.22) означає, що біля границь зон розташовуються екстремуми цієї функції. На рис. 3.8 тонкими лініями показані параболи, які відповідають рівнянню (3.2).

Біля дна зон параболі є нормальними, що відповідає  $A>0$ , біля стелі зон параболі є оберненими, що відповідає  $A<0$ .

### 3.7. Зони Бриллюена

Вище було показано, що із зміною хвильового вектора від 0 до  $\pm \frac{\pi}{a}$ , енергія електрона зростає неперервно. При  $k = \pm \frac{\pi}{a}$  вона одержує перший розрив. При подальшому збільшенні  $\vec{k}$  енергія знову зростає неперервно, поки при  $k = \pm 2\left(\frac{\pi}{a}\right)$  не одержує другого розриву і т.д.

Області значень  $\vec{k}$ , в межах яких енергія електрона змінюється неперервно, а на границях одержує розрив, називаються зонами Бриллюена.

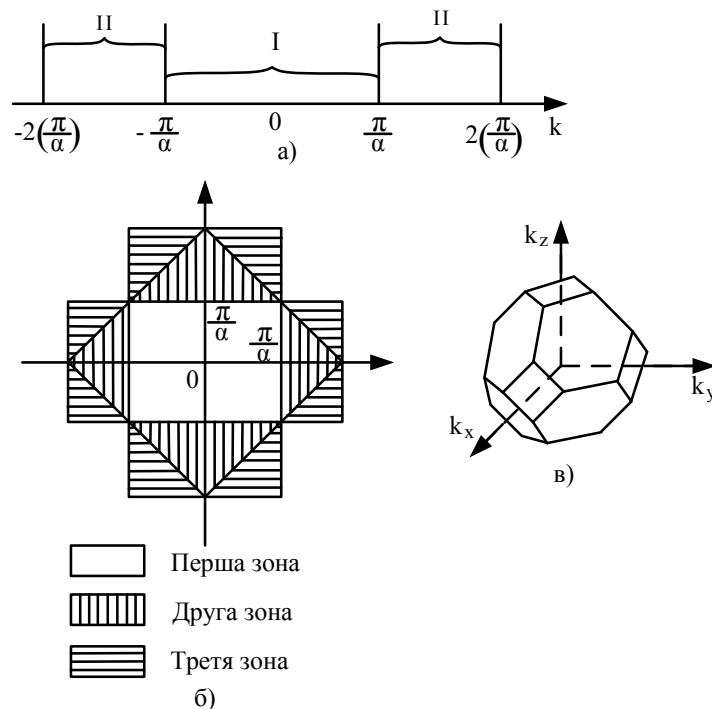


Рис. 3.9 – Зони Бриллюена:

- а) для одновимірного ланцюжка; б) для двовимірної квадратної ґрати;  
в) ґранецентрованої кубічної ґраток.

На рис. 3.9, а показані зони Бриллюена для лінійної моделі кристала. Зона I простирається від  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$ , зона II – від  $-2(\pi/2)$  до  $-\pi/2$  і від  $+\pi/2$  до  $+2(\pi/2)$  і має протяжність, рівну  $2(\pi/2)$ , і т.д.

Таким чином, всі зони Бриллюена мають одну і ту ж протяжність рівну  $2(\pi/2)$ .

Поняття зон Бриллюена розповсюджується і на випадок двох – і трьохмірних ґрат. Як приклад на рис. 3.9 б, показані три перші зони Бриллюена для двохмірної квадратної ґрати, а на рис. 3.9 в – перша зона для гранецентрированої кубічної ґрати. В межах кожної зони енергія електрона змінюється неперервно із зміною хвильового вектора, а на границях зон вона терпить розрив. Твердження про рівність всіх зон Бриллюена зроблене для лінійної моделі кристала, зберігає свою силу і для двох – і трьохмірних кристалів.

### 3.8. Приведені зони

На рис. 3.8 приведена побудова залежності енергії електрона від хвильового вектора, який змінюється від 0 до  $\pm\infty$ . Періодичність системи дозволяє, проте, виразити енергію електрона за допомогою хвильових векторів, які лежать лише в межах першої зони, тобто в межах від  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$ .

Це витікає із того, що рівняння Шредінгера задовольняє не тільки функція  $\psi = -U(x)e^{ik'x}$ , де  $k'$  – хвильовий вектор який лежить в межах першої зони, але й функції  $\psi = U(x)e^{ikx}$ , де

$$k = k' + n \frac{2\pi}{a} \quad (3.23)$$

хвильовий вектор, відповідаючий стану електрона в будь-якій зоні.



Операція побудови всіх енергетичних зон в межах першої зони, називається приведенням зон до першої зони, а самі зони, побудовані таким чином, називаються приведеними зонами. Із (3.23) витікає, що приведення зон складається із зміщення до осі енергій частин кривої  $E(k)$ , які відносяться до різних зон, на відрізки кратні  $2(\pi/2)$ . На рис. (3.8) пунктиром показані 2-а та 3-я і частково 4-а приведені зони, горизонтальними стрілками – напрямком зміщення при побудові цих зон, в розривах стрілок вказана величина зміщення. Із цього рисунка видно, що всіх непарних приведених зон в центрі розташовуються мінімуму, а на границях зон – максимуму; у парних зон, навпаки, в центрі розташування максимуми.

Аналогічним чином будуються приведені зони для трьохмірного кристала. Допоміжною обставиною, з якою при цьому приходиться зустрічатися, є наступне. Так як періодичність ґрати в трьохмірному кристалі

в різних напрямках може бути різною то значення  $\vec{k}$ , за яких настає брегівське відбиття і виникають розриви в енергетичному спектрі електрона, буде також різним: для напрямку, вдовж якого періодичність ґрати дорівнює  $a$ , розриви настають при  $k_a = n \cdot \pi/a$ , для напрямку з періодичністю  $b$  – при

$k_b = n \cdot \pi/b$ , для напрямку з періодичністю  $c$  – при  $k_c = n \cdot \pi/c$ , і т.д.

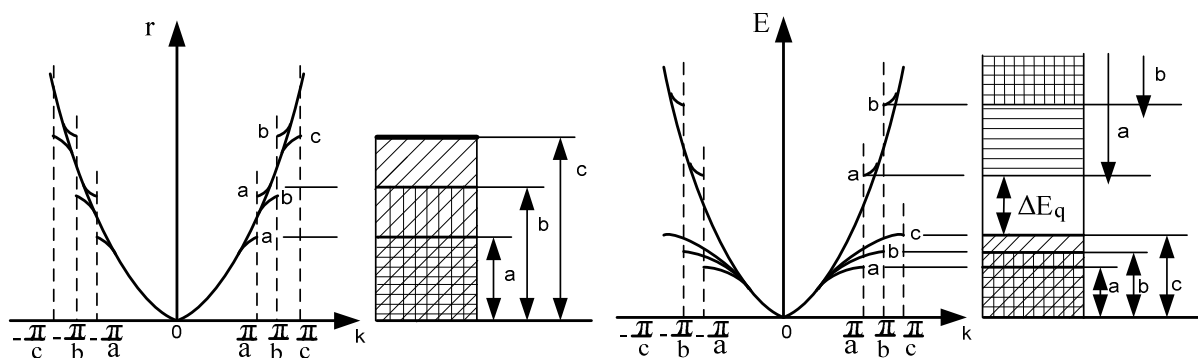


Рис. 3.10 - Перекриття енергетичних зон:

- а – дозволені зони накладаються на заборонені;
- б – заборонені зони для різних напрямків в кристалі накладаються один на одного, утворюючи заборонну зону для кристала в цілому.

Внаслідок цього область енергій, заборонена для одних напрямків, може перекриватись, областями дозволених енергій для інших напрямків (рис.3.10 а) і енергетичний спектр в цілому буде неперервним. Тільки в тому випадку, коли області заборонених енергій для всіх напрямків накладаються один на одного (рис.3.10б), в кристалі будуть існувати абсолютно заборонені області і поза енергетичний спектр збереже зонний характер.

### 3.9. Ефективна маса електрона

Розглянемо рух електронів у кристалі під дією зовнішнього поля напругою  $\vec{E}$ . Поле діє на електрон з силою  $\vec{F} = -e\vec{E}$ . У випадку зовсім вільного електрона ця сила є єдиною. На електрон же, який знаходиться в кристалі, помимо неї діє періодичне поле ґраток. Тому рух електронів у кристалі є значно складнішим, ніж рух вільного електрона в потенційному ящику. Один із способів описання цього руху полягає в наступному.

Швидкість руху електрона у кристалі дорівнює груповій швидкості розповсюдження електронних хвиль і виражається формулою

$$V_e = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\hbar} \cdot \frac{dE}{dk} . \quad (3.24)$$

За час  $dt$  зовнішня сила  $\vec{F}$  виконує роботу з переміщення електронів, чисельно рівну

$$dE = V_e dt F = \frac{F}{\hbar} \cdot \frac{dE}{dk} dt . \quad (3.25)$$

Звідси знаходимо

$$F = \hbar \frac{dk}{dt} . \quad (3.26)$$

Продиференціюючи  $V_e$  за часом, визначимо прискорення електронів:

$$a = \frac{dV_e}{dt} = \frac{1}{\hbar} \cdot \frac{d^2 E}{dk^2} \frac{dk}{dt} dt \quad (3.27)$$

Підставивши  $\frac{dk}{dt}$  із (5.22) одержимо

$$a = - \frac{1}{\hbar^2} \cdot \frac{d^2 E}{dk^2} F. \quad (3.28)$$

Формула (3.28) установлює зв'язок між прискоренням електрона і зовнішньою силою діючого поля  $\vec{E}$ .

Вона виражає, таким чином, другий закон Ньютона. Із цієї формули виходить, що під дією зовнішньої сили  $\vec{F}$  електрон в періодичному полі кристалу рухається в середньому так, як рухався б під дією цієї сили вільний електрон, якщо б мав масу

$$m_{ef} = \frac{\hbar^2}{d^2 E / dk^2}. \quad (3.29)$$

Маса  $m_{ef}$  називається ефективною масою електрона.

Приписуючи електрону, що знаходиться в періодичному полі кристалу, масу  $m_{ef}$ , ми можемо вважати цей електрон «вільним» і описувати його рух у зовнішньому полі так, як описується рух звичайного вільного електрона. До речі, для вільного електрона, для якого  $E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$ , формула (3.29) дає,  $m_{ef} = m$ , що, власне, і слід було очікувати.

Необхідно підкреслити, що введення поняття ефективної маси є лише зручним способом описування поведінки електрона в періодичному полі кристалу. Сама ж ефективна маса не є масою у звичайному розумінні слова. Вона не визначає ні гравітаційних, ні, строго кажучи, інерційних властивостей електрона. За величиною вона може бути, як більше, так і менше маси електрона, що покоїться, за знаком – як позитивною, так і від'ємною.

Для ілюстрації поняття ефективної маси розглянемо наступний приклад. Нехай в енергетичній зоні, показаній на рис. 3.11, а, знаходиться

один електрон, який у віддаленості зовнішнього поля розташовується на дні зони.

На рис. 3.11 показана залежність від хвильового вектора  $\vec{k}$  енергії електрона  $E(k)$ , швидкість руху  $V_z = \frac{1}{\hbar} \cdot \frac{dE}{dk}$  і ефективної маси  $m_{ef} = \hbar^2 \left( \frac{d^2 E}{dk^2} \right)^{-1}$ .

При невеликих значеннях  $\vec{k}$ , поки крива  $E(k)$  залишається квадратичною параболою:  $E = \frac{\hbar^2}{2m_{ef}} k^2$ , швидкість руху електрона

$V_z = \frac{\hbar}{2m_{ef}} k$  лінійно зростає з ростом  $k$ , а ефективна маса  $m_{ef} = \hbar^2 \left( \frac{d^2 E}{dk^2} \right)^{-1}$

залишається практично сталою і рівною  $m_n$ . Такий електрон поводить себе нормально в тому сенсі, що він має позитивну ефективну масу і прискорюється в напрямку дії зовнішньої сили.

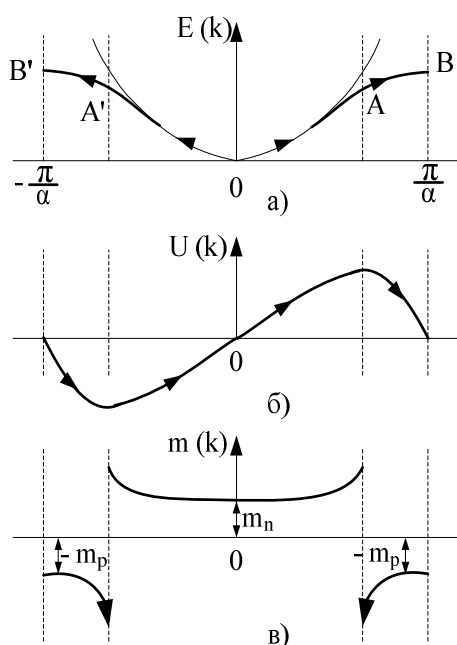


Рис. 3.11 - Залежність хвильового вектора енергії електрона (а), швидкості руху (б) і ефективної маси (в).

нескінченності. При переході через точку  $A$  ефективна маса змінює знак: вона стає від'ємною. Це означає, що при подальшому збільшенні  $\vec{k}$

У міру віддалення від початку координат крива  $E(k)$  поступово віддаляється від параболи, підростання швидкості із збільшенням  $\vec{k}$  зменшується, внаслідок чого  $m_{ef}$  збільшується. Тобто  $A$  є точкою перегину кривої  $E(k)$ . У цій точці  $dE/dk$  досягає максимуму, а  $d^2 E/dk^2$  обертається в нуль. Тому в точці  $A$  швидкість досягає максимального значення, а  $m_{ef}$  обертається в

швидкість електрона не збільшується, а зменшується, хоча напрямок і величина зовнішньої сили зберігаються незмінною. У точці  $B$  електрон відчуває бреггівське відбиття і з'являється в точці  $B'$ . В інтервалі  $B'A'$  електрон прискорюється в напрямку, протилежному дії зовнішньої сили  $F$ , його швидкість змінюється від нуля до максимального від'ємного значення, а ефективна маса – від  $m_p$  до  $-\infty$ . У точці перегину  $A'$  знак ефективної маси змінюється з від'ємного на позитивний і в інтервалі  $A'O$  електрон прискорюється в напрямку дії зовнішньої сили  $F$ , швидкість його поступово збільшується до нуля, а ефективна маса досягає постійно позитивного значення, рівного  $m_n$ .

Такий характер поведінки електрона при переміщеннях його від дна зони до верху пояснюється зміною співвідношення між зовнішньою силою  $\vec{F}$ , яка діє на електрон, і внутрішньою силою, зумовленою полем кристалу і направленою протилежно  $\vec{F}$ .

На ділянці  $OA$  внутрішня сила, залишаючись меншою зовнішньої, поступово збільшується і досягає в точці  $A$  величини зовнішньої сили, внаслідок чого різниця між ними зменшується до нуля. Тому електрон на цій ділянці прискорюється в напрямку дії зовнішньої сили, але величина прискорення неперервно падає і в точці  $A'$  обертається в нуль. Оскільки величина зовнішньої сили зберігається при цьому сталою, то електрон поводить себе так, наче його маса неперервно зростає і в точці  $A$  обертається в нескінченність.

На ділянці  $AB$  поле кристалу діє на електрон з більшою силою, ніж зовнішнє поле. Тому електрон набуває від'ємне (по відношенню до напрямку зовнішньої сили) прискорення, швидкість його неперервно падає і в точці  $B$  обертається в нуль. Електрон веде себе таким чином, як частинка із змінною від'ємною масою.

У точці  $B$  електрон відчуває бреггівське відбиття і його хвильовий вектор міняє знак на протилежний, що означає появу електрона в точці  $B'$ .

На ділянці  $B'A'$  він прискорюється полем ґраток, яка діє на електрон із більшою силою, ніж зовнішнє поле. Тому електрон прискорюється в напрямку, протилежному  $\vec{F}$  і, як наслідок, продовжує вести себе як частина із змінною від'ємною масою. Після точки  $A$  внутрішня сила стає менше зовнішньої і електрон починає вести себе як частинка з позитивною масою.

### 3.10. Заповнення зон електронами і електричні властивості твердих тіл

Кожна енергетична зона містить, як ми це з'ясували, обмежене число енергетичних рівнів.

Відповідно до принципу Паулі на кожному рівні може розміститися не більше двох електронів. При обмеженому числі електронів, які містяться в твердому тілі, заповненими будуть лише деякі з найбільш низьких енергетичних зон.

За характером заповнення зон електронами всі тіла можна розділити на дві великі групи.

1. До першої групи відносяться тіла, в яких над повністю заповненими зонами розташовується зона, заповнена лише частково (рис. 3.12,а). Така зона з'являється в тому випадку, коли атомний рівень, із якого вона утворюється, заповнений в атомі тільки частково. Типовим прикладом цього можуть служити лужні метали. У натрія, наприклад, що має електричну конфігурацію  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ , на рівні  $3s$  знаходиться один електрон, тоді як для заповнення цього рівня необхідні два електрона. Тому зона  $3s^1$  утворена з рівнів  $3s$ , виявляється заповненою тільки наполовину.

Часткова заповнена зона може проявлятися і внаслідок накладання заповнених зон на пусті або частково заповнені зони, як це має місце в лужно-земельних металах. Наявність зони, заповненої електронами лише частково, характерна для металів.

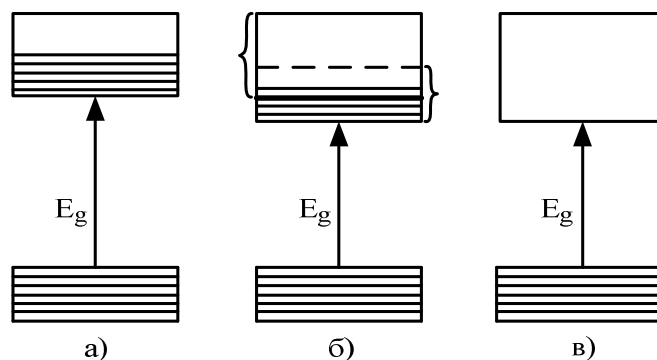


Рис. 3.12 - Зонна структура твердих тіл:  
(а), (б) – метали, (в) – напівпровідники і діелектрики.

2. До другої групи відносяться тіла, в яких над повністю заповненими зонами розташовуються пусті зони (рис.3.12, в). Типовим прикладом твердих тіл з таким характером заповнення є елементарні напівпровідники IV групи таблиці Менделєєва: алмаз, кремній, германій. Як вже відмічалось, валентна зона цих елементів, що містить чотири стани на атом, заповнена чотирма валентними електронами, тоді як зона проводимості, яка містить також чотири стани на атом, виявляється зовсім пустою. До цієї групи твердих тіл відноситься і багато хімічних сполук. Всі вони є або напівпровідниками, або діелектриками.

Відповідно до зонної теорії твердих тіл електрони зовнішніх енергетичних зон мають практично однакову свободу руху у всіх тілах, незалежно від того, є вони металами або напівпровідниками (діелектриками). При відсутності зовнішнього поля цей рух не може, проте, привести до появи електричного струму, так як розподіл електронів за швидкостями є симетричним. Це означає, що коли в кристалі вибрати електрон, що рухається з даною швидкістю у даному напрямку, то обов'язково знайдеться інший електрон, що має швидкість таку ж за величиною, але протилежну за напрямком.

Розглянемо з погляду зонної структури електричні властивості, які повинні мати метали і напівпровідники (діелектрики).

**Метали.** Створимо в кристалі зовнішнє електричне поле напругою  $\vec{E}$ .

На кожний електрон це поле діє з силою  $\vec{F} = -e\vec{E}$ , яка прагне порушити симетрію в розподілі електронів за швидкостями, прагнучи пригальмувати електрони, які рухаються проти сили, і прискорити електрони, що рухаються уздовж сили. Оскільки подібне прискорення і уповільнення незмінно пов'язане із зміною енергії електрона, то воно позначає перехід електронів у нові квантові стани з більшою або меншою енергією. Такі переходи можуть мати місце, очевидно, лише в тому випадку, якщо в енергетичній зоні, до якої належать дані електрони, мають незайняті квантові стани, тобто коли зона укомплектована неповністю. Подібні зони як раз є у металів. Тому вже слабе електричне поле здібне передати електронам достатній імпульс, щоб перевести їх на близлежащий вільний рівень. В тілі з'явиться переважний рух електронів проти поля, зумовлений появою електричного струму. Такі тіла повинні бути, очевидно, хорошими провідниками, що і має місце в дійсності.

**Напівпровідники і діелектрики.** У напівпровідниках і діелектриках зони валентних електронів (валентні зони) цілком заповнені і віддалені від найближчої вільної зони достатньо широким енергетичним інтервалом. Зовнішнє поле прикладене до такого кристалу, не в змозі змінити характер руху електронів у валентній зоні, так як воно не здатне підняти електрон в вищележачу вільну зону.

У середині ж самої зони, яка не має ні одного вільного рівня, вона може визвати лише перестановку електронів містами, що не збурює симетрії розподілу їх за швидкостями. Тому в таких тілах електричне поле не може викликати появу направленого руху електронів, тобто появи електричного струму, незважаючи на наявність «вільних» електронів, здатних рухатися по всьому тілу.

Природно, що такі тіла при абсолютному нулі повинні мати нульову електропровідність, тобто бути ізоляторами. Але з підвищенням температури внаслідок термічного збудження електронів валентної зони, частина з них



може придбати енергію, достатню для подолання забороненої зони і переходу в зону провідності. Остання перетворюється в частково зайняту, а в раніше цілком заповненій валентній зоні pojawiaються вакансії, по яких може відбуватись рух електронів. Чим менш широка заборонена зона і вище температура кристалу, тим більше електронів переходить у вільну зону і тим більшу вакансій утворюється у валентній зоні. Для тіл, в яких ширина забороненої зони не перевищує 1eV, вже при кімнатній температурі в зоні провідності виявляється достатнє число електронів, а у валентній зоні – вакансій, щоб зумовити відносно високу електропровідність, а такі тіла звичайно називають напівпровідниками. Такі ж тіла з широкою забороненою зоною - діелектриками.

Звідси стає ясным, що розподіл твердих тіл другої групи на діелектрики і напівпровідники є чисто умовним. У міру того, як в якості напівпровідників починають використовувати матеріали з більш широкою забороненою зоною, подібне ділення поступово втрачає сенс.

### 3.11. Поняття про дірки

Електрони валентної зони, в якій є вільні стани, під дією зовнішнього електричного поля можуть переходити в ці стани і створювати в кристалі електричний струм. Визначимо миттєву величину цього струму.

Миттєвий струм, створений одним електроном, який рухається із швидкістю  $\vec{V}$ , дорівнює

$$\vec{j}_e = -e\vec{V}. \quad (3.30)$$

Припустимо, що таким електроном є електрон, стан якого характеризується хвильовим вектором  $\vec{k}_s$ . Швидкість такого електрона

визначається співвідношенням  $\vec{V}_e = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dE}{dk}$ . Результируючий миттєвий струм для всієї сукупності електронів в зоні дорівнює

$$\vec{J} = -e \sum_s V_s \quad (3.31)$$

де підсумування ведеться по всім станах, зайнятих електронами. Для зони, повністю укомплектованої електронами  $\vec{J} = 0$ , так як для будь-якого електрона з хвильовим вектором  $\vec{k}_s$  і швидкістю руху  $\vec{V}_s$  знайдеться електрон з хвильовим вектором  $-\vec{k}_s$  і швидкістю  $-\vec{V}_s$ .

Будемо тепер вважати, що в зоні зайняті всі стани, крім одного, який характеризується вектором  $\vec{k}_i$  і швидкістю руху  $\vec{V}_i$ . Сумарний струм в такій зоні буде

$$\vec{J} = -e \sum_{s \neq i} \vec{V}_s = -e \sum_s \vec{V}_s + e \vec{V}_i \quad (3.32)$$

Оскільки перша складова правої частини дорівнює нулю, то

$$\vec{J} = e \vec{V}_i. \quad (3.33)$$

З цієї формули видно, що сумарний струм всіх електронів у зоні, яка має один вакантний стан, еквівалентний струму, утвореному однією частиною з позитивним зарядом  $+e$ , який вміщений в цей стан. Такі фіктивні частини називаються дірками. Фіктивними вони є тому, що в дійсності не існують. Введення їх виправдовується тим, що вони дозволяють досить складну задачу про рух великої кількості електронів валентної зони замінити значно більш простою задачею про рух відносно невеликої кількості дірок, розташованих на цих рівнях.

Дірки, як і електрони, мають ефективну масу. За абсолютною величиною ефективна маса дірки дорівнює ефективній масі електрона, який раніше займав даний вакантний стан. Оскільки знак заряду дірки протилежний знаку заряду електрона, то для появи струму дірок, еквівалентного струму,

створюваного колективним рухом електронів, знак ефективної маси дірок повинен бути протилежним знаку ефективної маси електронів, розташованих у вершини валентної зони. Як відомо, такі електрони мають від'ємну ефективну масу. Тому ефективна маса дірок повинна бути позитивною.

Таким чином, дірка як носій заряду має позитивний заряд  $+e$  і позитивну ефективну масу. Оскільки дірка являє собою вакансії електронів у валентній зоні, то їх енергію необхідно відраховувати від вершини валентної зони.

### **3.12. Домішкові рівні в напівпровідниках**

Напівпровідники будь-якого ступеня очистки містять завжди домішкові атоми, які мають свої власні енергетичні рівні, що одержали назву домішкових рівнів. Вони можуть розташовуватися як у дозволених, так і в заборонених зонах напівпровідника на різних відстанях від вершини валентної зони і дна зони провідності. У ряді випадків домішки вводять свідомо для надання напівпровіднику необхідних властивостей.

### **3.13. Донорні рівні**

Будемо вважати, що в кристалі германія частина атомів германія заміщена атомами п'ятивалентного миш'яку. Германій має ґратки типу алмазу, де кожний атом оточений чотирма найближчими сусідами, зв'язаними з ним валентними силами. Для встановлення зв'язку з цими сусідами атом миш'яку витрачає чотири валентних електрона. П'ятий електрон в утворенні зв'язку не бере участі. Він продовжує рухатися в полі атомного залишку миш'яку, послабленому в германії в  $\epsilon$  раз, де  $\epsilon = 16$  діелектрична сита германія. Внаслідок такого послаблення поля орбіта електрона дуже збільшується і атом миш'яку стає подібним до атома водню: навколо атомного залишку із зарядом  $+e$  на значній відстані від нього рухається один електрон. Тому для визначення енергії зв'язку і радіуса

орбіти цього електрона можна використати формули, виведені для атома водню. Вони мають вигляд

$$E = -\frac{e^4 m}{8\varepsilon_0^2 \hbar^2} = -13,6 \text{ eV}, \quad r = \frac{\hbar^2}{8\varepsilon_0^2 \hbar^2} = -13,6 \text{ eV} \quad r = \frac{\hbar^2 \varepsilon_0}{e^2 m} = 0,53 \text{ \AA}.$$

Для переходу до атома миш'яка в цих формулах  $e^2$  необхідно замінити на  $\frac{e^2}{\varepsilon}$ , бо сила взаємодії електронів з атомним залишком, дорівнює в вакуумі  $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ , зменшується в германії в  $\varepsilon$  раз; крім того масу вільного електрона  $m$  необхідно замінити на ефективну масу електрона в германії  $m_n = 0,12m$ . Зробивши це, одержуємо

$$E_D = -\frac{13,6}{\varepsilon^2} \left( \frac{m_n}{m} \right) = 0,065 \text{ eV}, \quad r = 0,53 \varepsilon \left( \frac{m_n}{m} \right) \approx 70 \text{ \AA}.$$

Із цієї формули видно, що енергія зв'язку п'ятого електрона миш'яка, вміщеного в ґратки германія, повинна вимірюватися сотими долями електрон-вольта, а радіус орбіти цього електрона на багато разів перевищує сталу ґраток германія.

У табл.3.1 наведені експериментальні значення енергії іонізації домішкових атомів п'ятивалентних елементів в германії і кремнії.

Таблиця 3.1 - Значення енергії іонізації домішкових атомів п'ятивалентних елементів в германії і кремнії

Ед, eV	Фосфор	Миш'як	Сурьма
Si	0,045	0,050	0,035
G	0,012	0,013	0,010

Для германія вона дорівнює приблизно 0,01eV, для кремнія – приблизно 0,04 – 0,05eV. При наданні електрону такої енергії він відривається від атома і набуває активність вільно переміщування в кристалі, перетворюючись інакшим чином, в електрон провідності.

З погляду зонної теорії, цей процес можна представити так. Між заповненою валентною зоною і вільною зоною провідності розташовуються енергетичні рівні  $E_D$  п'ятого валентного електрона домішкових атомів миш'яка. Ці рівні розміщуються безпосередньо біля дна зони провідності, відстаючи від неї на відстань:  $E_D = 0,01\text{eV}$ . Якщо надати електронам таких домішкових рівнів енергії  $E_D$ , вони приходять в зону провідності. Утворені при цьому позитивні заряди локалізуються на нерухомих атомах миш'яка і в електропровідності не беруть участі.

Оскільки енергія збудження домішкових електронів  $E_D$  майже на два порядки нижче енергії збудження власних електронів германія  $E_g$ , то при нагріванні будуть збуджуватися в першу чергу електрони домішкових атомів, внаслідок чого їх концентрація може на багато разів перебільшувати концентрацію власних електронів. У цих умовах германій матиме в основному домішкову електронну провідність.

Домішки, які є джерелом електронів провідності, називаються донорами, а енергетичні рівні цих домішок – донорними рівнями.

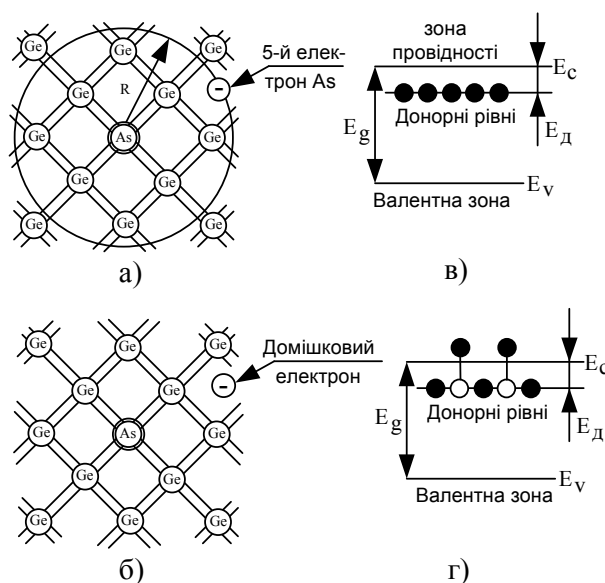


Рис.3.13 - Збудження носіїв заряду в напівпровідниках n-типу:

а) при  $T=0^\circ\text{K}$  атоми п'ятивалентного миш'яку в ґратках германія знаходяться в неіонізованому стані; б) «іонізація» атомів миш'яку і утворення «домішкових» електронів провідності при  $T>0^\circ\text{K}$ ; в) енергетичні рівні 5-х електронів миш'яка являють собою донорні рівні  $E_D$ ; г) перехід електронів з донорних рівнів в зону провідності при  $T>0^\circ\text{K}$ .

### 3.14. Акцепторні рівні

Будемо тепер вважати, що в ґратках германія частина атомів германія заміщена атомами тривалентного індію. Для утворення зв'язків з чотирма ближніми сусідами в атома індію не хватає одного електрона, його можна «зайняти» у атома германія.

У табл. 3.2 наведена енергія, необхідна для забезпечення таких «запозичених» електронів атомами бора, алюмінія, галія, індію валентної зони германія і кремнія. Із таблиці видно, що  $E_v$  має той же порядок, що і  $E_d$

Таблиця 3.2 - Енергія, необхідна для забезпечення «запозичених» електронів атомами бора, алюмінія, галія, індію валентної зони германія і кремнія

Ед, еВ	Бор	Алюміній	Галій	Індій
Si	0,045	0,060	0,070	0,16
G	0,010	0,010	0,011	0,011

Розірваний зв'язок являє собою дірку так, як вона відповідає утворенню у валентній зоні германія вакантного місця.

На рис. 3.14 показана енергетична схема германія, що містить домішки індію.

Безпосередньо біля вершини валентної зони на відстані  $E_a$  розташовуються незаповнені енергетичні рівні атомів індію. Близькість цих рівнів до валентної зони приводить до того, що вже при порівняно низьких температурах електрони із валентної зони можуть переходити на домішкові рівні. Вступаючи в зв'язок з атомами індію, вони втрачають здатність переміщуватися у ґратках германія і в провідності не беруть участі. Носіями заряду є лише заряди, які появляються у валентній зоні. Тому провідність германія в цьому випадку є в основному дірочною.

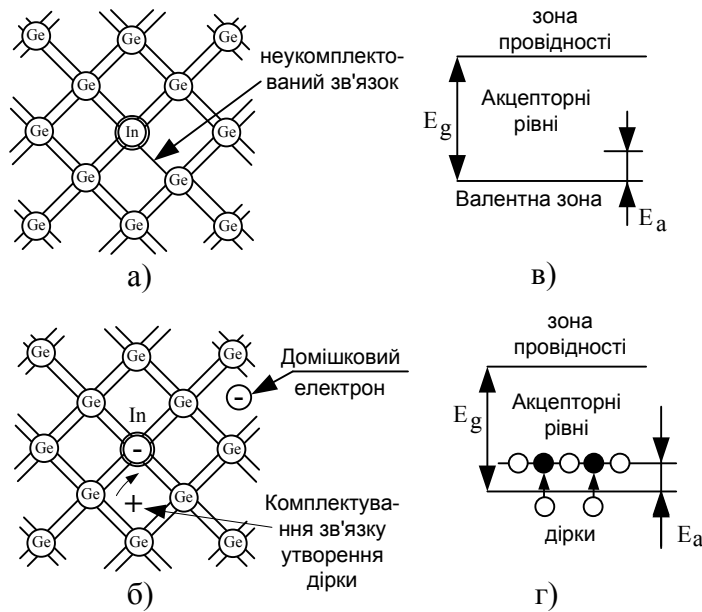


Рис.3.14 - Збудження носіїв заряду домішкових напівпровідників р-типу:

а – атоми тривалентного індія в ґратках германія при  $T^1 = 0^0\text{K}$ . Четвертий зв'язок атомів індія не укомплектований; б – при  $T^1 > 0^0\text{K}$  електрони можуть переходити на неукомплектовані рівні домішкових атомів, приводячи до утворення іона індія і незаповненого рівня «дірки» у валентній зоні германія  $E_a$ ; в – енергетичні рівні неукомплектованих зв'язків домішкових атомів являється собою акцепторні рівні при  $T > 0^0\text{K}$  приводять до появи в цій зоні дірок.

Домішки, які захоплюють електрон з валентної зони напівпровідника, називаються акцепторними домішками, а енергетичні рівні цих домішок – акцепторними рівнями.

Із даних таблиці видно, що донорні і акцепторні рівні розташовуються на дуже малих відстанях від своїх зон. Тому їх називають мілкими зонами.

### 3.15. Рівні прилипання

До дрібних рівнів відносяться і так звані рівні прилипання, або, як кажуть, пастки захоплення. Вони також розташовуються біля границь енергетичних зон і енергетично обмінюються з цими зонами носіями заряду. Обмін полягає в тому, що електрон зони провідності, захоплений рівнем прилипання, розташованого біля дна цієї зони, не залишається довгий час на рівні, а внаслідок теплового збудження зони перекидається в зону провідності і т.д.

Аналогічний обмін дірками проходить між валентною зоною і рівнями прилипання, розташованими біля вершини цієї зони.

Наявність в напівпровідниках рівнів прилипання може суттєво збільшити час життя нерівноважних носіїв заряду.

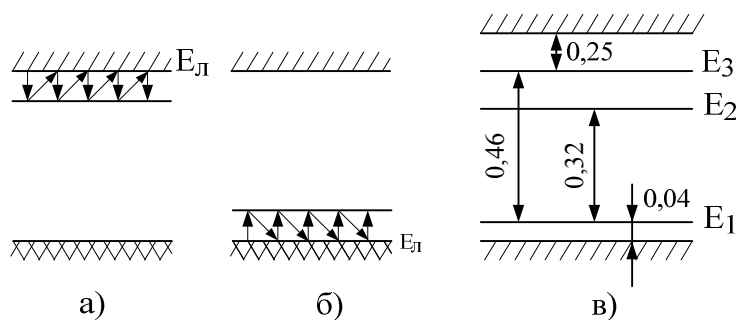


Рис. 3.15 - Рівні прилипання (а,б) й глибокі домішкові рівні (в) в напівпровідниках.

### 3.16. Глибокі домішкові рівні

Деякі домішки в напівпровідниках приводять до появи домішкових рівнів, розташованих далеко від границь енергетичних зон. Як приклад, покажемо домішкові рівні міді, введені в германій. При абсолютному нулі атом міді є нейтральним. З підвищенням температури він охоплює з валентної зони германія спочатку один, потім другий і зрештою, три електрони, перетворюючись в 3-кратно від'ємно заряджений іон. У валентній зоні германія утворюються при цьому три дірки. Цей процес можна розглядати і так: атом міді при  $T = 0^{\circ}\text{K}$  має три дірки, які переходять у валентну зону германія з підвищенням температури. Енергії, необхідної для відриву від атома міді першої дірки, відповідає рівень  $E_1$ , другої дірки – рівень  $E_2$ , третьої дірки – рівень  $E_3$ , як видно з рисунка, рівні  $E_1$  і  $E_2$  є глибокими рівнями.

Крім міді, глибокі домішкові рівні в германії і кремнії дають атоми золота, марганця, заліза, нікеля, кобальту і платини. Ці рівні відіграють велику роль у протіканні процесів рекомбінації неосновних носіїв заряду.



### 3.17. Світлодіоди

Напівпровідникова електроніка до недавніх часів могла вирішувати задачі перетворення електричних сигналів в електричні. В останні роки в результаті синтезу і дослідження нових напівпровідникових сполучень була вирішена задача перетворення електричних сигналів в оптичні і створені нові джерела світла – напівпровідникові світловипромінюючі діоди.

Більш ніж 130 років пройшло з моменту створення лампи розжарювання, яка одержала надзвичайно широке розповсюдження. В наш час світлодіоди (СД) витісняють лампи розжарювання.

Використовуючи теорію квантової фізики, пояснення світлового випромінювання в приладах з р - n – переходами лежить в випромінювальній рекомбінації надлишкових носіїв. (рис. 3.16 і 3.17).

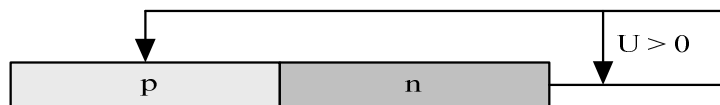


Рис. 3.16 - р - n – перехід.

Світлодіоди випромінюють світло, коли електрони і позитивно заряджені дірки рекомбінують із випроміненням фотона. Це випромінення виникає в активній області р - n – прилада (р - n – перехід). Ефективність СД можна суттєво підвищити, збільшивши концентрацію носіїв заряду. Енергія, яка споживається СД, і яка не перетворюється в світло, перетворюється в тепло, нагріваючи, таким чином, СД.

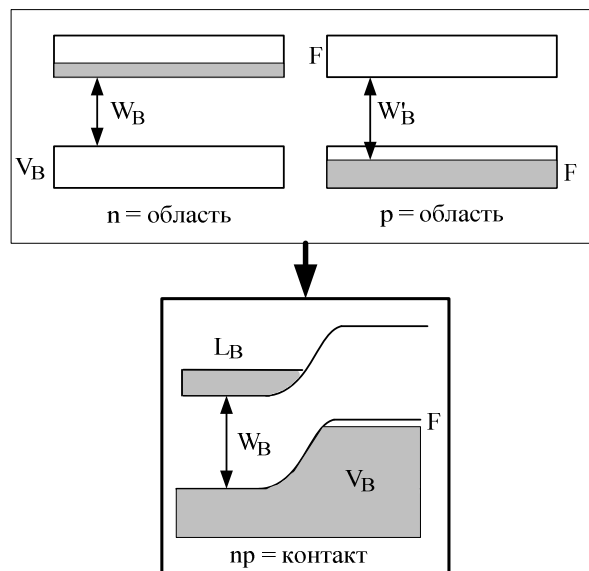


Рис. 3.17 - p - n – перехід, який виникає із-за дифузії носіїв з позитивним зарядом в n – області і дифузії носіїв з від'ємним зарядом p – області.

Інжекційна люмінесценція – особливий тип електролюмінесценції, яка має місце, коли величина концентрації носіїв заряду перевищує її термічно рівноважну величину концентрації ( $np = n^2$ ). В залежності від того, наскільки система відхилилась від стану своєї теплової рівноваги ( $np = n_j^2$ ), зменшення концентрації надлишкових неосновних носіїв заряду приводить до різних процесів рекомбінації. Домінуючим механізмом рекомбінації в промислово випускаємих СД є випромінювальна рекомбінація електронів на ізоелектронних центрах з участю фононів. Фотони – квазічастинки, які співставляються хвилі зміщень атомів (іонів) і молекул кристала із положень рівноваги. Коливальна енергія кристала (відносно вузлів кристалічної ґрати) наближено дорівнює сумі енергій фотонів, амплітуда коливань (енергія фононів) пов'язана з температурою кристала.

Створення ізоелектричних центрів може бути формально пояснено процесом заміни атома кристалічної решітки елементом іншої групи, наприклад, зміна Ga на Al в напівпровіднику типа GaP.

При формуванні ізоелектронних центрів виникає локальна поляризація, або утворення полів короткодійних диполів, які виникають за рахунок різниці електровід'ємних носіїв в атомах кристалічної решітки і легіруючих

атомах Вільні екситони – це слабкозв’язані збуджені частинки, які складаються із одного електрона і однієї позитивно зарядженої дірки. Слабка кулонівська взаємодія в екситоні приводить до утворення енергетичного рівня, який знаходиться в межах забороненої зони ( $W_B$ ).

Вільні електрони дифундують в межах активної області і при цьому переносять енергію і не переносять заряду. Екситони можуть бути захвачені ізоелектронними центрами. Після початкової екситонфононної взаємодії дірки і електрони із екситона переходять в енергетичні зони за допомогою ізоелектронного донора (від’ємна поляризація). Екситон – фононна взаємодія компенсує внутрішню енергію екситона ( $W_{free}$ ) і енергію зовнішнього зв’язку екситона ( $W_{iso}$ ). В результаті розпад екситона приводить до вузького спектру поліхроматичного випромінювання, при цьому спектр корелює з шириною забороненої зони ( $W_B$ ) відповідного напівпровідника. Оскільки випромінювальний процес проходить як спонтанний процес, когерентність світлодіодних джерел світла достатньо низька в порівнянні з когерентністю лазерних діодів (рис. 3.18).

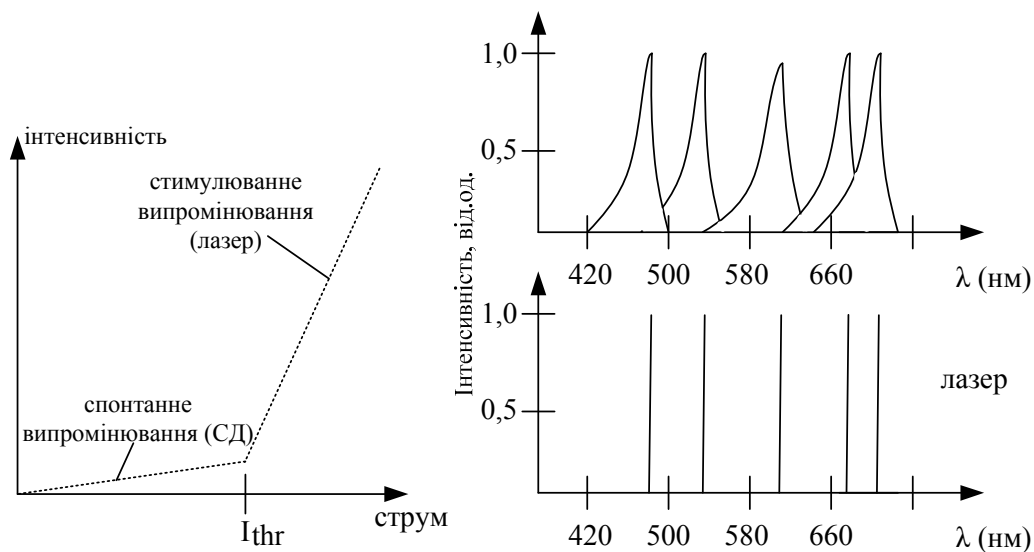


Рис. 3.18 - Спектр випромінювання СД і лазерних діодів. Лазерні діоди випромінюють світло з більшою когерентністю. Це дозволило лазерним діодам бути більш придатними кандидатами для використання в довгих оптичних лініях передачі даних.

Енергія вільного екситона може бути описана за допомогою формул Рітберга.

Ця енергія відповідає ширині забороненої зони напівпровідника ( $W_B$ ), зменшеної на величину слабкої енергії зв'язку ( $W_{free}$ ). При цьому має місце дуже невелике додання кінетичної енергії ( $W_{kin}$ ).

Енергія зв'язку ( $W_{free}$ ) може бути формально описана в тому же виді, що і енергія молекули водню. Проте, її абсолютне значення у екситонів набагато менше із-за великої відстані між електроном і діркою в екситоні.

$$E_{Ex} = W_B - W_{free} + W_{kin} = W_B - \frac{m_r q^4}{2(4\pi\epsilon_0\epsilon\hbar)^2 n^2} + \frac{\hbar^2 k^2}{2(m_e + m_h)}, \quad (3.34)$$

$$\text{де } m_r = \left[ \frac{m_e m_h}{m_e + m_h} \right];$$

$q$  – елементарний заряд;  $\epsilon$  – діелектрична проникливість екситона,  $k^2 = (k_e + k_v)^2$  – хвильове число, яке відповідає енергетичному рівню у валентній зоні і в зоні провідності;  $m_r$  – приведена маса екситона.

Як витікає із рівняння (3.34) енергія іонізації наближається до ширини забороненої зони  $W_B$  при  $n \rightarrow \infty$ , якщо третій (фотонний) член не приймати до уваги.

Якщо р - n – перехід заключений з обох боків між тонкими шарами із матеріалу з низьким коефіцієнтом заломлення, то інтенсивність електромагнітних коливань в межах р - n – переходу зростає (оптичне обмеження). При густині струму вище порогового значення, який залежить від типу приладу (рис. 3.19) виникає розщеплення валентної зони і зони провідності. Якщо це розщеплення стає більше ширини забороненої зони ( $W_B$ ), заселеність більш високих електричних станів перевищує заселеність більш низьких станів, що і є основним фактором для лазерного процесу. В цьому випадку процес стимульованного випромінювання стає домінуючим. Це приводить до світлового випромінювання з високою когерентністю.

СД, які є в продажу, складаються із напівпровідникового кристалу, поміщеного в лінзу із полімерного матеріалу (наприклад, епоксидна смола, рис. 3.19)

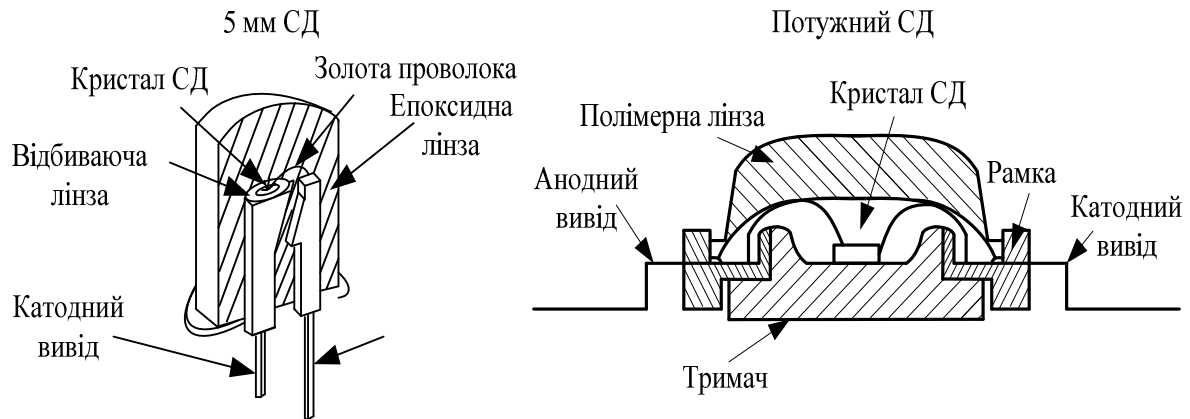


Рис. 3.19 - СД діаметром 5 мм та високопотужних СД (1,2 Вт) (Lumileds) – в перерізі; 4-кристальний СД (5 Вт) (Lumileds) – вид зверху.

Лінза фокусує світло від кристалу і захищає кристал від вологи і корозії. Приєднання контакта до анода звичайно виконується за допомогою паяння або електропровідящего клею, в той час як контакт до катода приєднується тонким золотим проводом (зварювання золотим проводом).

На сьогоднішній день більшість потужних СД, споживаючи 5 Вт потужності, забезпечує світловий потік до 120лм (біле світло).

У залежності від довжини хвилі і якості випромінюючого кристалу ефективність СД при температурі оточуючого середовища варіюється від 1% до 40%. В наш час найкращі результати за ефективністю одержані для СД червоного кольору свічення. При підвищенні температури р - n – переходу ефективність СД знижується.

Таким чином, ефективна внутрішня і зовнішня теплопровідність є необхідними факторами для безпечного та ефективного застосування СД. Проте довжина хвилі випромінювання майже не залежить від температури і змінюється всього на 1 нм при зміні температури на 10 градусів Кельвіна.

Відповідний температурний коефіцієнт  $k$ , що залежить від напівпровідникового матеріалу, приблизно дорівнює  $1 \cdot 10^{-2}$

$$\Phi(T_2) = \Phi(T_1)e^{-k(T_2-T_1)} \quad (3.35)$$

$$\lambda(T_2) = \lambda(T_1) + (T_2 - T_1) \cdot 0,1 \left[ \frac{\text{нм}}{^\circ\text{C}} \right] \quad (3.36)$$

де  $\Phi$  – світловий потік,  $T_1$  – початкова температура;  $T_2$  – кінцева температура;  $\lambda$  – довжина хвилі випромінювання,  $k$  – температурний коефіцієнт.

Високопотужні СД повинні мати дуже високу внутрішню теплопровідність кристалу і всього пристрою в цілому. Межа верхньої температури визначається температурою полімеризації лінзи із епоксидної смоли  $\sim 104$  °С. Проте, тривала величина температури (р – n) – переходу вище 80 °С помітно знижує світловий потік і його стабільність в високо потужних СД. Це є наслідком дифузії в твердій фазі в надтонких шарах, обмежуючих (р – n) – перехід. Швидкість дифузії в твердому тілі експотенціально залежить від температура відповідного шару:

$$D = D_0 e^{\frac{E}{kT}} \quad (3.37)$$

де  $D$  – коефіцієнт дифузії;  $D_0$  – стала матеріалу;  $E$  – енергія активації;  $T$  – температура (К).

Для використання СД в освітленні, а також в автомобілях і дисплеях декілька СД повинні бути електрично і механічно з'єднані з платою або стрічкою. В більшості випадків носій СД представляє собою просту печатну плату. На відміну від багатошарових плат поверхня таких плат майже повністю покрита металом для покращення відводу тепла.

Відвід тепла можна покращити за допомогою:

- металічних контактів великого розміру, в особливості, поблизу анодної контактної площадки СД;
- збільшення конвекційних проміжків поміж СД і платою;
- збільшення відстані між СД на данній платі;
- гарного теплового з'єднання між платою і СД освітлювача.

Класифікація СД і СД пристроїв. В залежності від їх рівня інтеграції СД можуть бути класифіковано, як показано на рис. 3.20.

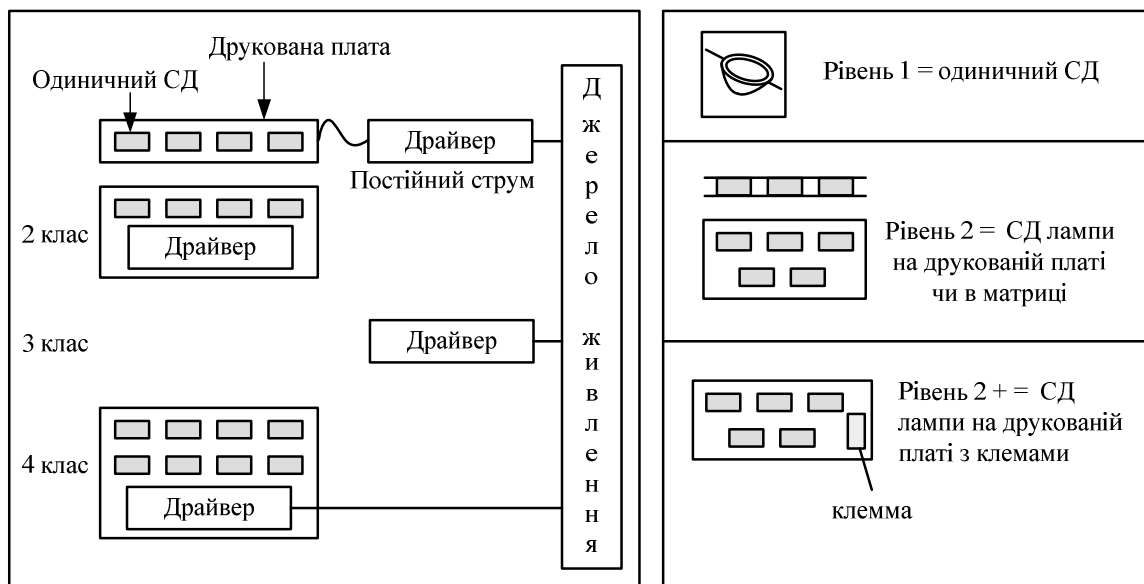


Рис. 3.20 – Класифікація СД за рівнями.

Класифікація СД за рівнями, звичайно застосованим для електронних пристроїв є найбільш популярною.

Рівень 0 – голий СД кристал;

Рівень 1 – 1, 2 або більше кристалів, зібраних однієї СД лампи.

Рівень 2: матриця електрично і термічно з'єднаних СД ламп (печатна плата).

Рівень 3: печатна плата (як за рівнем 2) з електричною схемою управління і вторинною оптикою.

Рівень 4: СД освітлювач включає одно або декілька виробів рівня 3.

### Список літератури

1. Киттель Ч., Введение в физику твердого тела. М., Наука, 1978;
2. Епифанов Г.И., Физика твердого тела., М., Высшая школа, 1977;
3. Бонч – Бруевич В. Л., Калашников С.Г., Физика полупроводников, М., Наука, 1977.

## Питання для самоперевірки

1. Що таке колективізовані електрони?
2. В чому полягає зонний характер енергетичного спектра електронів в кристалі?
3. В чому полягає наближення дуже зв'язаних електронів?
4. В чому полягає наближення вільних електронів?
5. В чому полягає наближення слабкозв'язаних електронів?
6. Пояснити модель Кроніга – Пенні?
7. Що таке зони Бриллюена?
8. Що таке приведені зони?
9. Що таке ефективна маса електрона?
10. Пояснити електричні властивості металів з точки зору зонної теорії.
11. Пояснити енергетичні властивості діелектрика з точки зору зонної теорії.
12. Пояснити енергетичні властивості напівпровідників з точки зору зонної теорії.
13. Що таке дірки?
14. Що таке донорні рівні?
15. Що таке акцепторні рівні?



#### 4. ЕЛЕКТРОННА ЕМІСІЯ

Самовільній (спонтанній) емісії електронів з твердого тіла перешкоджає наявність на границі потенційного порога  $U_0$ , зумовленого силами взаємодії між електронами, які вилітають з речовини на відстань, що перевищує атомні розміри, і не скомпенсованого позитивного заряду іонів ґраток.

Максимальна можлива енергія електронів провідності в металі при температурі абсолютного нуля дорівнює  $E_F$  (енергія Фермі). Для виривання з рівня  $E_F$  одного електрона необхідна допоміжна енергія  $e_\phi = U_0 - E_F$ , що дорівнює роботі виходу електрона з металу (рис. 4.1).

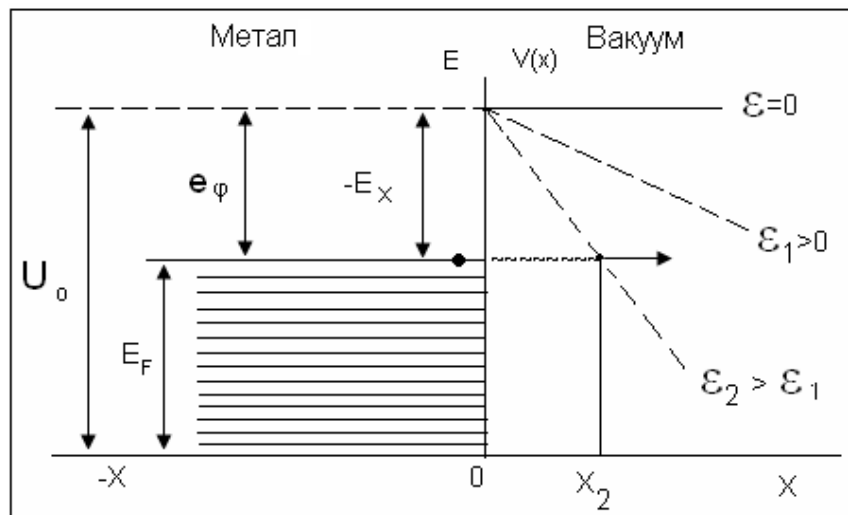


Рис. 4.1.

Спонтанна або автоелектронна емісія можлива тільки при умові перетворення потенційного порогу в потенціальний бар'єр, через який електрони можуть «просочуватись тунелюванням» за рахунок квантово-механічного ефекту. Термін «автоелектронна емісія» означає, що вихід електронів за межі твердого тіла виникає самовільно, тобто не пов'язаний з затратами допоміжної енергії. Електрони, які «просочуються» за межі бар'єра, набувають енергію від електричного поля  $\epsilon$  тільки у вакуумному проміжку емітер-анод.

Чим більше напруженість зовнішнього електричного поля  $\varepsilon$ , тим крутіше із зміною відстані  $x$  від поверхні змінюється потенціальна енергія електрона  $U(x) = -e\varepsilon x$ , в цьому полі, тим вужчий потенціальний бар'єр, а, значить, вище густина струму автоелектронної емісії  $j_A$ , яка залежить від квантово-механічного коефіцієнта прозорості бар'єра. Зовнішнє електричне поле не тільки призводить до трансформації потенційного порога в бар'єр, але й зменшує висоту бар'єра (ефект Шотткі), що також сприяє зростання автоемісійного струму.

Залежність  $j_A(\varepsilon)$  має експоненційний характер:  $j_A \sim \exp[-C/\varepsilon]$ , де  $C$  – стала, яка визначає роботу виходу електрона з еміттера.

Відповідно до розрахунків для появи значних струмів автоелектронної емісії необхідні напруженості поля  $\varepsilon \sim 10^8 \div 10^9$  В/м.

В області частот електромагнітного поля, яка відповідає світловому діапазону ( $\nu \sim 10^{15} \div 10^{16}$  Гц), енергія одного кванта  $h\nu$  може виявитися більше роботи виходу електрона з метала  $e_\phi$ . Явище випускання твердими тілами електронів під дією світлових квантів називається зовнішнім фотоефектом, або фотоелектронною емісією. Співвідношення  $h\nu_0 \geq e_\phi$  визначає червону границю фотоефекта з метала. У власних напівпровідниках та діелектриках фотоелектронна емісія спостерігається лише у випадку, якщо  $h\nu_0 \geq \Delta E_d + \chi$ , де  $\Delta E_d$  – ширина забороненої зони,  $\chi$  – спорідненість емітера до електрона.

Явище фотоелектронної емісії характеризується числом емітованих електронів, що приходяться в середньому на один поглинутий фотон. Цю величину називають квантовим виходом фотоефекту і позначають через  $Y$ .

При достатньо низьких частотах через малість енергії одного кванта (наприклад, на НВЧ,  $h\nu \sim 10^{-5} \div 10^{-6}$  еВ) взаємодію електромагнітної хвилі з електронами твердого тіла необхідно розглядати чисто класично, тобто як безперервний процес прискорення електрона в полі НВЧ хвиль.

Бомбардуючи тверде тіло електронами з енергією  $E_p > e_\phi$  (в металах) або  $E_p \geq \Delta E_d$  (в діелектриках і напівпровідниках), можна спостерігати емісію вторинних електронів, тобто вибивання з твердого тіла електронів за рахунок

передачі їм енергії від падаючих на речовину первинних електронів. При енергіях  $E_p$ , менших вказаних порогових значень, спостерігається пружне або квазіпружне (із збудженням фотонів) відбиття первинних електронів.

Явище випромінювання електронів твердими тілами при бомбардуванні пучком первинних електронів називається вторинною електронною емісією. Відношення числа випромінених вторинних електронів за деякий час до числа первинних електронів, які падають на мішень за той же інтервал, називають коефіцієнтом вторинної електронної емісії і позначають  $\sigma$ .

Величина  $\sigma$  суттєво залежить від енергії  $E_p$  первинних електронів.

При нагріванні твердого тіла зростають амплітуди коливань атомів кристалічних ґраток (на квантовій мові це відповідає збільшенню густини фононів). Передача енергії від фононів електронному газу призводить до розширення енергетичного спектру електронів. Наприклад, у металах це викликає появу максвеллівського «хвоста» у фермівській функції розподілу електронів за енергіями. З підвищенням температури все більша кількість електронів має енергію достатню для подання роботи виходу на границі твердого тіла з вакуумом.

Явище випромінювання у вакуум електронів нагрітим тілом називають термоелектронною емісією. У напівпровідниках при температурі, близькій до абсолютного нуля, електрони в зоні провідності відсутні. Нагрівання тіла зумовлює при цьому закидання електронів у зону провідності з донорних рівнів і з валентної зони. При взаємодії з фотонами електрони термалізуються, спектр їх стає максвеллівським.

Густину струму термоелектронної емісії  $j_T$  визначають за формулою Річардсона-Дешмана:

$$j_T = (1 - \langle R \rangle) A T^2 \exp(-e_\phi / kT),$$

де  $\langle R \rangle$  - середнє за спектром термоелектронів значення коефіцієнта відбиття електронів від потенціального порога;

$A$  – термоелектронна стала, що дорівнює  $120,4 \text{ А(град}^2 \text{ м}^2 \text{)}$

#### 4.1. Фотоелектронна емісія

Випускання електронів з твердого тіла (або рідини) під дією електромагнітного випромінювання, як відмічали називається фотоелектронною емісією, зовнішнім фотоелектричним ефектом. Це явище відкрив Герц в 1887р.

Розглянемо спочатку закономірності фотоелектронної емісії з металів. На ранній стадії А.Г. Столетов (1888р.) встановив, що фотострум  $i_{\phi}$  пропорційний першому ступеню інтенсивності  $I$  падаючого світла. Проте в подальшому стало ясно, що ця залежність характерна тільки для області слабких світлових потоків. З появою лазерів було експериментально показано, що фотострум пропорційний  $n$ - ступеню інтенсивності світла:

$$i_{\phi} = \eta_n I^n, \quad (4.1)$$

де  $\eta_n$  – імовірність  $n$ -квантового фотоефекта.

При  $n=1$  вираз (4.1) переходить в закон Столетова.

Другою характерною особливістю фотоелектронної емісії є незалежність від інтенсивності світла максимальної енергії  $E_{\max}$  емітованих електронів. Розглядаючи взаємодію світла з твердим тілом як індивідуальні акти поглинання квантів (фотонів)  $h\nu$  електронами, А. Ейнштейн показав, що

$$E_{\max} = h\nu - e\phi, \quad (4.2)$$

де  $e\phi$  – робота виходу електрона з фотокатода.

Це так званий закон Ейнштейна для фотоелектронної емісії. Із (4.2) зокрема, випливає, що при деякій частоті  $\nu_0$  з твердого тіла можуть вириватися тільки електрони з енергією, близькою до нуля. При цьому  $h\nu_0 = e\phi$ . Частота  $\nu_0 = e\phi/h$  або відповідна їй довжина хвилі  $\lambda = hc/e\phi$  визначає довгохвильову (червону) границю фотоефекта емісії з твердого тіла з даною роботою виходу  $e\phi$ .

Фотоелектронна емісія можлива лише при  $\lambda < \lambda_0$ , тобто при  $\nu > \nu_0 = c/\lambda_0$ . При значних інтенсивностях світла повинно спостерігатися відхилення від

закону Ейнштейна (4.2), пов'язане з кінцевою імовірністю поглинання одним електроном кількох фотонів. При такій багатофотонній (нелінійній) фотоелектронній емісії:

$$(E_{\max})n = n \cdot h\nu - e\varphi. \quad (4.3)$$

Звідси вивиходить, що при нелінійній фотоелектронній емісії не існує строго визначеної червоної границі, оскільки при  $(E_{\max})n \rightarrow 0$ ,  $\nu n \rightarrow e\varphi/hh$ . Із теорії нелінійної фотоелектронної емісії витікає, що порядок багато квантового фотоефекту  $n$  визначається виразом

$$n = \langle x \rangle = \langle 1 + e\varphi/h\nu \rangle, \quad (4.4)$$

де дужки означають цілу частину  $x$ .

Фотоелектронна емісія є практично безінерційною. Тому, при низьких інтенсивностях світла часовий хід фотоструму  $i_{\phi}(t)$  точно повторює часову залежність світлового потоку  $I(t)$ . За багатоквантовою фотоелектронною емісією імпульс фотоструму  $\tau_{\phi}$  буде більш коротчим ніж імпульс світла  $\tau_{\text{св}}$  внаслідок нелінійної люкс-амперної характеристики

$$\tau_{\phi} = \tau_{\text{св}} / \sqrt{n}. \quad (4.5)$$

Емісійні властивості фотокатода прийнято характеризувати квантовим виходом  $Y$  (ел/кв), спектральною чутливістю  $S$  (А/Вт або А/лм). Квантовий вихід є число емітованих фотоелектронів  $N_e$ , які приходяться на кожний із падаючих на поверхню фотонів  $N_{\phi}$ :

$$Y = N_e / N_{\phi} = (i_{\phi} / e)(I / h\nu). \quad (4.6)$$

Спектральна чутливість  $S_{\lambda}$  виражається відношенням фотоструму насичення  $i_{\phi}$  до потужності падаючого на фотокатод монохроматичного випромінювання. Інтегральна чутливість являє собою відношення фотоструму насичення до інтенсивності потоку випромінювання стандартного джерела випромінювання. Як правило, таким джерелом вважається лампа з вольфрамовою ниткою при температурі нитки 2850 К. Ще однією практично важливою характеристикою фотоструму є густина темного струму  $j_t$ , тобто густина струму термоелектронної емісії за робочої

температури з неопроміненим світлом катода. Цей струм є джерелом шумів при вимірюванні слабких світлових потоків за допомогою фотоелектронних приладів.

Залежність квантового виходу від частоти світла, яка називається спектральною характеристикою фотокатода, можна пояснити наступним чином.

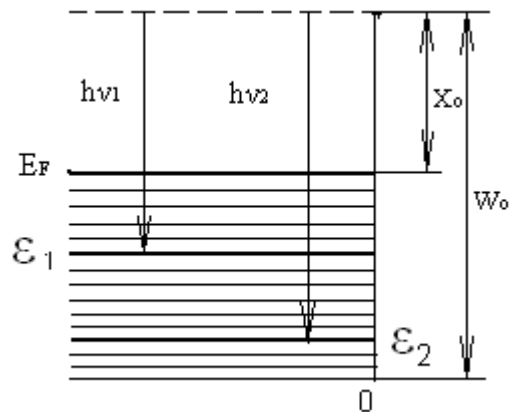


Рис. 4.2.

Проникаючи в метал, фотони передають свою енергію вільним електронам. Але, як видно з енергетичної діаграми (рис 4.2) за частотою світла  $\nu_1$  вийти з металу можуть тільки ті електрони, енергія яких лежить в інтервалі від  $\epsilon_1$  до  $E_F$ , оскільки тільки в них після поглинання фотона енергія більша або дорівнює  $W_0$ .

Ймовірність передачі енергії фотона одному з цих електронів залежить від відношення концентрації електронів, енергії яких лежать у вказаному інтервалі, до повної концентрації вільних електронів. При більшій частоті світла  $\nu_2$  нижньою границею енергій електронів, достатніх для виходу при взаємодії з фотоном буде енергія  $\epsilon_2$ . Очевидно в цьому випадку ймовірність передачі енергії фотона електрона, який здатний покинути метал, більша. Таким чином, із збільшенням частоти падаючого випромінювання  $\nu$  повинен збільшуватися квантовий вихід.

Ці міркування підтвердимо наближеним виведенням рівняння спектральної характеристики металічного фотокатода для  $T_k = 0\text{K}$  і частот падаючого випромінювання, близьких до порогової частоти  $\nu_0$ .

Спочатку звернемо увагу на наступні обставини. Фотони мають кінцеву енергію  $h\nu$  і малу величину імпульсу ( $h\nu/c$ ). Тому при взаємодії світла з електронами металу розподіл останніх за імпульсами залишається практично незмінним і зберігається хаотичність руху електронів.

Таким чином, мінімальна компонента імпульсу електрона  $P_x$  до взаємодії з фотоном, при якій в результаті поглинання фотона буде виконуватися умова виходу  $\varepsilon_x + h\nu = W_o$ , дорівнює:

$$P_{x\min} = \sqrt{2me(W_o - h\nu)}.$$

Елементарний фотострум  $dI_{px}$ , створений електронами з даною компонентою імпульсу  $P_x$ , пропорційний елементарному потоку  $dv_{px}$  електронів до поверхні металу і кількості фотонів, що проникають в метал за 1 сек. Слід враховувати, що обчислення квантового виходу проводять по відношенню до потоку фотонів, які падають на фотокатод. Оскільки деяка їх частина, що характеризується коефіцієнтом відбиття  $R$  (значним для металів), відбивається від поверхні, в рівняння повинен бути введений множник  $1-R$ , який залежить від частоти падаючого світла.

Проникаючий в метал потік фотонів у результаті взаємодії з електронами ослаблюється за законом  $N_x = N_o e^{-kx}$ , де  $k(\nu)$  – коефіцієнт поглинання світла даної частоти. Іншими словами, електрони з енергією  $\varepsilon + h\nu$  генеруються на різних відстанях від поверхні металу. При цьому із загального числа цих електронів брати участь у фотоелектронній емісії можуть тільки ті електрони, які утворюються поблизу поверхні металу і, таким чином, на шляху до неї не втрачають енергію. Для оцінки цієї частини електронів в розрахунок необхідно ввести коефіцієнт  $a$ , що визначається співвідношенням між коефіцієнтом поглинання світла  $k(\nu)$  і ефективним перерізом  $Q$  для зіткнень електронів, які призводять до втрати ними енергії.

Нарешті, ймовірність  $\omega$  поглинання фотона електроном, строго кажучи, залежить від енергії останнього, що також повинно бути відображено в розрахунку.

З урахуванням всіх цих міркувань запишемо вираз для елементарного фотоструму  $dI_{px}$ , створеного електронами, що мають компоненту імпульсу  $P_x$  в напрямку, перпендикулярному до осі  $x$ :

$$dI_{px} = e(1-R)a\omega dv_{px} = e(1-R)a\omega \frac{P_x}{m_e} \cdot \frac{2\pi(P_F^2 - P_x^2)}{h^3} dP_x \quad (4.7)$$

Для визначення повного фотоструму необхідно проінтегрувати цей вираз за всіма значеннями  $P_x$ , які задовольняють умові виходу, тобто від  $P_{x\min}$  до  $P_F$  (оскільки розрахунок ведеться для  $T_K = 0K$  і значить найбільшою енергією електронів є енергія рівня Фермі):

$$I_\phi = e(1-R) \frac{2\pi}{h^3} \int_{\sqrt{2m_e(W_0-h\nu)}}^{\sqrt{2m_e\mathcal{E}_F}} a\omega(P_F^2 - P_x^2) P_x dP_x. \quad (4.8)$$

Складність подальшого рішення полягає в тому, що як ймовірність  $\omega$  поглинання фотона, так і коефіцієнт  $a$  (внаслідок його залежності від ефективного перерізу  $Q$  для зіткнень електронів) є функцією енергії (імпульсу) електрона.

## 4.2. Термoeлектронна емісія металів

При температурі  $T=0K$  не може виникати емісія електронів із кристалу, оскільки енергії навіть найбільш швидких електронів недостатньо для переборення потенційного бар'єру на його границі. Для виконання електронної емісії необхідно надати електронам допоміжну енергію, наприклад шляхом нагрівання речовини до досить високих температур.

Якщо в одиниці об'єму металу знаходиться  $dn_{V_x, V_y, V_z}$  вільних електронів з компонентами швидкості від  $V_x$  до  $V_x+dV_x$ ;  $V_y$ ,  $V_y+dV_y$ ;  $V_z$ ,  $V_z+dV_z$



(де  $V_x$  – компонента швидкості в напрямку, перпендикулярному до поверхні тіла), то потік таких електронів, які приходять до поверхні, дорівнює

$$d\nu_{eV_xV_yV_z} = V_x dn_{V_xV_yV_z}, \quad (4.9)$$

За межі поверхні у вакуум можуть вийти тільки електрони, в яких компонента швидкості в напрямку осі  $X$  достатня для переборення бар'єру, тобто

$$\frac{m_e V_x^2}{2} \geq W_0 \quad (4.10)$$

Таким чином, для визначення числа електронів, які покидають в одиницю часу одиницю поверхні металу, при даній температурі нетреба ввести (4.9) функцію розподілу електронів за швидкістю

$$dn_{V_x, V_y, V_z} = \frac{2m_e^3}{h^3} \cdot \frac{dV_x, V_y, V_z}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{kT}} + 1} \quad (4.11)$$

і проінтегрувати одержаний вираз  $d\nu$  за всіма можливими компонентами швидкостей  $V_x, V_y, V_z$  і компонент швидкостей  $V_x$  з урахуванням (4.10).

Відповідно до класичних уявлень, електрони, які рухаються до поверхні з енергією достатньою для переборення потенційного бар'єру, обов'язково повинна вийти за межі тіла. Проте, відповідно до квантово-механічній теорії, не всі електрони виходять в вакуум, оскільки є деяка вірогідність їх відбиття від потенційного бар'єра. Тому для строгого вирішення задачі необхідно ввести коефіцієнт прозорості бар'єра як функцію енергії електрона  $\varepsilon$  і потім провести інтегрування. Складність такої задачі пов'язана із складною залежністю від  $\varepsilon$ , а також з висотою і формою бар'єра примушує йти на спрощення і вводити середнє значення коефіцієнта прозорості бар'єра для вилітаючих електронів. Тоді значення можна винести з під знака інтеграла і записати вираз для числа електронів, які покидають кожену секунду одиницю поверхні металу:

$$v_e = D \frac{2m_e^3 e}{h^3} \int_{V_{x1}}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} V_x \frac{dV_x dV_y dV_z}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{kT}} + 1}, \quad (4.12)$$

де  $V_{x1} = \sqrt{\frac{2W_0}{m_e}}$  - мінімально необхідна для переборення потенційного бар'єру

компонента швидкості електрона в напрямку осі X

Помноживши цей вираз на заряд електрона, одержимо для густини струму термоелектронної емісії

$$j_e = D e \frac{2m_e^3 e}{h^3} \int_{V_{x1}}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} V_x \frac{dV_x dV_y dV_z}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{kT}} + 1}. \quad (4.13)$$

Суттєвим при вирішенні цього рівняння є те, що мова йде тільки про найбільш швидкі електрони, для яких справедлива умова (4.10). Оскільки енергія електрона

$$\varepsilon = \frac{m(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)}{2}$$

завжди більше  $mV_x^2/2$ , навіть найменше значення енергії електронів  $\varepsilon_{\min}$ , яке враховується при інтегруванні, стає більше  $W_0$ . Як показує експеримент, величина  $(W_0 - E_F)/2$ , що являє собою ефективну роботу виходу ф, складає у всіх станів величину порядку одиниць вольт. Величина ж  $kT$  навіть при порівняно високій температурі  $T=2500\text{K}$  складає  $\frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 2.5 \cdot 10^8}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 0.2\text{B}$

Таким чином, показник експоненти  $\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{kT}$  не менше 10 або 20. Це дозволяє нехтувати одиницею в знаменнику підінтегрального виразу і записати:

$$j_e = D \frac{2m_e^3 e}{h^3} e^{\frac{\varepsilon_F}{kT}} \int_{V_{x1}}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} V_x dV_x dV_y dV_z; \quad (4.14)$$

$$\int_{V_{x1}}^{\infty} V_x e^{-\frac{m_e V_x^2}{2kT}} dV_x = -\frac{kT}{m_e} \int_{y1}^{+\infty} e^y dy = \frac{kT}{m_e} e^{-\frac{m_e V_{x1}^2}{2kT}}. \quad (4.15)$$

Інші два інтеграли можна привести до виду інтеграла Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}; \quad (4.16)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m_e V_y^2}{2kT}} dV_y = \sqrt{\frac{2kT}{m_e}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{m_e}{2kT}} V_y\right)^2} d\left(\sqrt{\frac{m_e}{2kT}} V_y\right) = \sqrt{\frac{2\pi kT}{m_e}}. \quad (4.17)$$

Підставивши значення інтегралів і замінивши  $\frac{m_e V_{x1}^2}{2}$  на  $W_o$ , одержимо рівняння термоелектронної емісії:

$$j_e = \frac{4\pi m_e^2 e k^2}{h^3} D T^2 e^{\frac{W_o - \epsilon_F}{kT}} = A D T^2 e^{\frac{W_o - \epsilon_F}{kT}}. \quad (4.18)$$

Це рівняння називають рівняння Річардсона – Дешмана.

Стала  $A = \frac{4\pi m_e^2 e k^2}{h^3} = 120 \cdot 10^4 \frac{\text{ампер}}{\text{м}^2 \text{град}^2}$  є універсальною сталою, що не залежить від еміттера.

### Список літератури

1. Фридрихов С.А., Мовнин С.М., Физические основы электрой техники., М., Высшая школа 1982. – 608с.
2. Соболева Н.А., Меламид А. Е., Фотоэлектрические приборы – М.: Высшая школа, 1974.
3. Добрецов А.Н., Гомоюнов М. В, Эмиссионная электроника, М.:Наука, 198с.

### Питання для самоперевірки

1. Що таке червона границя фотоефекту?
2. Що таке автоелектронна емісія?
3. Від чого залежить енергія емітованих електронів при фотоефекті?
4. Назвіть особливості фотоелектронної емісії.
5. Що таке квантовий вихід?
6. Що таке спектральна чутливість?
7. При яких інтенсивностях світла спостерігається відхилення від закону Ейнштейна?
8. Що таке нелінійна фотоелектронна емісія?
9. Що таке темновий струм?
10. Що таке вторинна електронна емісія?
11. Як залежить струм від температури при термоелектронній емісії?
12. Чому дорівнює червона границя при нелінійній фотоелектронній емісії?

## 5. ЛЮМІНЕСЦЕНЦІЯ

**Люмінесценція** (від латинської *lumen* – світло і *-escent* – суфікс, який означає слабку дію) – випромінювання, що являє собою надлишок над тепловим випромінюванням тіла і продовжується протягом часу, що значно перевищує період світлових коливань.

Перша частина визначення люмінесценції відокремлює її від теплового рівноважного випромінювання і вказує на те, що поняття люмінесценції застосовується тільки до сукупності атомів (молекул), які знаходяться у стані, близькому до рівноважного. Якщо є значні відхилення від рівноважного стану, говорити про теплове випромінювання або люмінесценцію не має сенсу. У видимій області спектра теплове випромінювання стає помітним тільки при температурі  $\sim 10^3 - 10^4$  К, люмінескувати ж в цій області тіло може за будь – якої температури, тому люмінесценцію часто називають холодним свічінням.

Друга частина визначення – прикмета тривалості – була введена С.І. Вавіловим, щоб відокремити люмінесценцію від різних видів розсіяння, відбиття, параметричного перетворення світла гальмівного і Черенкова – Вавілова випромінювання.

На відміну від розсіяння світла при люмінесценції між, поглинанням і випромінюванням діють проміжні процеси, період тривалості яких більше періоду світлової хвилі.

Люмінесценція – один з широко розповсюджених у природі видів випромінювання. Вона виникає в результаті поглинання речовиною енергії збудження та переходу його частинок з нормального у збуджений електронний стан. Таким чином, люмінесценцією є свічіння атомів, молекул, іонів і інших більш складних комплексів, яке виникає в результаті електронного переходу в цих частинках при їх поверненні із збудженого стану в нормальний.

Люмінесценція є нерівноважним процесом, оскільки після випромінювання молекула (атом) довгий час може залишатися в не збудженому стані (хоча в принципі вона може бути знова збудженою), тобто в загальному випадку не вважається існування рівноваги між зовнішнім полем випромінювання і свічіння частинок.

Існує велика кількість різноманітних як органічних, так і неорганічних речовин, що мають люмінесцентну здатність, властивості якої можуть бути суттєво неоднаковими. Ці відмінності виникають необхідність у класифікації явищ люмінесценції. В основу першої спроби такої класифікації була покладена тривалість процесу випромінювання. У результаті такої класифікації всі види люмінесценції були розділені на два великих класи, які одержали назву флуоресценція і фосфоресценція.

Під флуоресценцією розуміють свічіння, яке миттєво ( $\sim 10^{-9}$ с) затухає після припинення збудження; фосфоресценцією стали вважати свічіння, яке триває помітний проміжок часу ( $>10^{-6}$ с) після припинення збудження. Класифікація мала чисто якісний характер і не дозволила встановити чіткої границі між цими двома видами свічіння.

Люмінесценція у природі – полярне сяйво, свічення деяких комах, мінералів, гниючого дерева – спостерігалась давно. Ще в середні віки алхіміки при спробах перетворити важкі мінерали в золото шляхом розжарювання помітили, що деякі з них світяться деякий час в темряві.

Люмінесценція – квантовий процес, виникає при квантових переходах в атомах, молекулах, кристалах.

Люмінофори (від латинського *lumen* – світло і грецького – *phoros* – несучий) - спеціально синтезовані речовини, здатність до люмінесценції яких при різних способах збудження використовується для практичного застосування. Розрізняють органічні і неорганічні люмінофори.

Залежно від того, за рахунок якої енергії виникає збудження атома, розрізняють такі види люмінесценції:

- 1) фотолюмінесценцію, за якої збудження люмінофору виконується фотонами поглинутого випромінювання оптичної частини спектру;
- 2) рентгенолюмінесценцію – збудження виконується фотонами поглинутих рентгенівських променів;
- 3) катодолюмінесценцію – збудження виникає за рахунок кінетичної енергії електронів, які бомбардують люмінофор або молекули газу;
- 4) електролюмінесценцію – збудження виконується змінним електричним полем;
- 5) радіолюмінесценцію - збудження люмінофору створюється за рахунок випромінювання, яке виникає при радіоактивному розпаді ядер ( $\alpha$  -,  $\beta$  - і  $\gamma$  - випромінювання), і космічного випромінювання;
- 6) хемілюмінесценцію, за якої для збудження використовується хімічна енергія;
- 7) біолюмінесценція, за якої для збудження використовується біологічна енергія.

За Вавіловим люмінесценцією називають випромінювання, надлишкове над тепловим при тривалості його, рівній або більше  $10^{-10}$  с.

Визначення Вавілова, незважаючи на стислість, є точним і дуже конкретним, яке дозволяє завжди відрізнити випромінювання різних тіл. Із цього визначення випливає таке математичне описування люмінесценції:

$$E_{el}(\lambda, T) = E_e(\lambda, T) - \varepsilon(\lambda, T)E_{es}(\lambda, T), \quad (5.1)$$

де  $E_{el}(\lambda, T)$  - спектральна густина енергетичної світимості люмінесценції;

$E_e(\lambda, T)$  - повна спектральна густина енергетичної світимості випромінювання люмінофору;

$E_{es}(\lambda, T)$  - те ж випромінювання чорного тіла при температурі  $T$ ;

$\varepsilon(\lambda, T)$  - спектральний коефіцієнт теплового випромінювання люмінофору при температурі  $T$ .

Крім основних ознак люмінесценції, які ввійшли у визначення Вавілова, є ще допоміжні, які допомагають відокремити люмінесценцію від інших видів випромінювання. До таких ознак люмінесценції відносяться:

- 1) селективність цього випромінювання, яка залежить від властивості випромінюючої речовини;
- 2) некогерентність випромінювання люмінесценції.

Крім вказаної класифікації люмінесценції за способами збудження розрізняють види люмінесценції за характером фізичного процесу, що проходить в люмінофорі. За цією ознакою люмінофори діляться на три групи: спонтанного, вимушеного і рекомбінаційного свічіння.

**Спонтанне свічіння люмінесценції** саме короткочасне, воно виникає при переході із збудженого стану в незбуджений під дією поля самої збудженої частинки. Зовнішні поля на цей вид люмінесценції майже не впливають. Цей вид свічіння можна пояснити схемою рис.5.1, а.

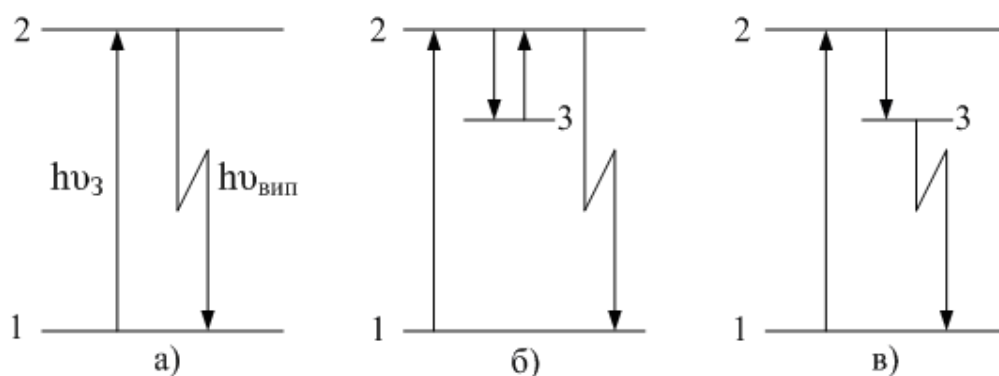


Рис. 5.1.

де 1 – незбуджений рівень, з якого електрон перейшов на збуджений рівень 2. На збудження витрачена енергія  $h\nu_z$ . Безпосередньо з рівня 2 електрон переходить на рівень 1, випромінюючи при цьому енергію  $h\nu_{\text{вип}} = h\nu_z$ .

При спонтанному випромінюванні перебування електрона у збудженому стані становить приблизно  $10^{-3}$  с.



**Вимушене свічіння** можна пояснити схемою рис.5.1, б. Електрон з нормального незбудженого рівня 1 переходить на збуджений рівень 2, з цього рівня попадає на метастабільний рівень 3, перехід з цього рівня в незбуджений стан малоймовірний. Під дією теплової енергії або зіткнень другого роду електрон переходить з метастабільного рівня 3 на рівень 2, з якого дозволений перехід на незбуджений рівень 1. Таке випромінювання має тривалість на декілька порядків більше ніж при спонтанному свічінні. Тривалість вимушеного свічіння люмінесценції дуже залежить від температури люмінофору. При низькій температурі люмінофору перехід електронів з метастабільного рівня 3 на збуджений рівень 2 малоймовірний. У цьому випадку більш ймовірним є перехід безпосередньо з метастабільного рівня 3 на збуджений рівень 1 і випромінювання виникає за схемою рис. 5.1, в.

**Рекомбінаційне свічіння** притаманне кристалічним речовинам з ґратками, порушеними включенням домішок, які називаються активаторами. Випромінюючим центром такого люмінофору є іон металу – активатор. Такі люмінофори з порушеними кристалічними ґратками називаються кристалофосфорами. Спрощену картину свічіння кристалофосфора можна проілюструвати рис. 5.2. На цьому рисунку буквою Н позначена нижня зона збуджених рівнів, буквою П – зона провідності. Поблизу зони провідності розташовані метастабільні рівні М, а біля нейтральної зони Н – рівень активатора а.

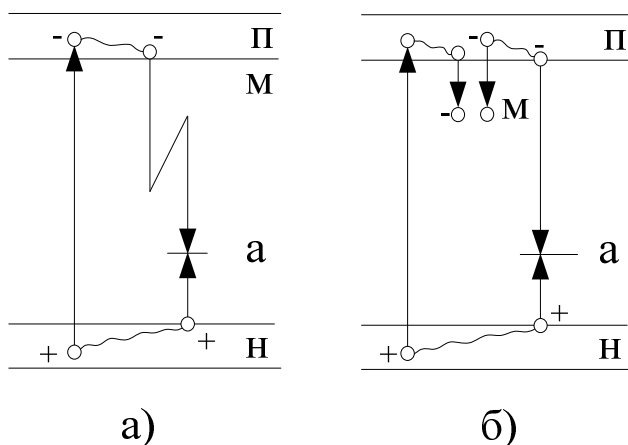


Рис 5.2.

Квант випромінювання поглинутий люмінофором, переводить електрон з деякого незбудженого рівня в зону провідності. Дуже швидко електрон втрачає частину своєї енергії і попадає на нижній рівень зони провідності,

відповідний тепловій рівновазі, віддавши при цьому частину своєї енергії на нагрівання люмінофору. З нижнього рівня  $\Pi$  електрон може перейти на рівень активатора  $a$ , виділивши при цьому квант енергії випромінювання (рис. 5.2, а), або, втративши ще частину своєї енергії, може перейти і на метастабільний рівень  $m$  (рис. 5.2, б). На метастабільному рівні  $m$  електрон затримується на тривалий час, бо йому необхідно отримати допоміжну енергію. Одержавши допоміжну енергію, він переходить знову в зону провідності, з нижнього рівня якої, випромінюючи квант енергії, електрон попадає на рівень активатора  $a$ . Після виходу електрона із зони незбуджених рівнів у ній з'являється позитивний іон – дірка, яка дифундує в цій зоні до переходу на рівень активатора. Акт рекомбінації будь-якого електрона з позитивним іоном супроводжується випромінюванням кванта енергії.

При рекомбінаційному свічінні електрон одного атома, який попав у результаті збудження в зону провідності, при випромінюванні кванта енергії рекомбінує з діркою вже іншого атома. Таким чином, при рекомбінаційному свічінні у процесі перетворення енергії бере участь весь люмінофор.

### 5.1. Кристалофосфори

У наш час всі технічні люмінофори, які застосовуються в люмінесцентних лампах, є кристалофосфорами. За визначенням, кристалофосфорами називаються складні синтетичні неорганічні речовини з дефектними кристалічними ґратуами, які мають здатність світитися як при збудженні, так і деякий час після призупинення збудження. Для одержання таких люмінофорів необхідна висока чистота вихідних компонентів.

Основу кристалофосфорів може скласти сульфід, селенід, силікат, фосфат, борат та інші сполуки різних матеріалів. Які активатори застосовують важкі метали: срібло, мідь, марганець та інші, які вводять в люмінофор в малих кількостях ( $10^{-3}$  г/г); вони порушують однорідність деяких вузлів ґратки або розташовуються між вузлами ґраток, крім цих двох

компонентів в шихту кристалофосфору вводиться невелика кількість (2-5%) плавня. Плавнем служать різні солі: NaCl, KCl, LiCl, та інші. Після ретельної очистки компонент утворюється шихта, яка добре перемішується і розжарюється при температурі 700-1200 °С. Розжарювання проводиться в електричних печах у спеціальних тиглях. Термічна обробка (нагрівання, охолодження, швидкість підвищення і зниження температури) має велике значення для одержання високоякісних люмінофорів. Після термічної обробки люмінофор звільнюється від плавня і змільгується до певного розміру зерен. Розмір зерна – дуже важливий фактор, бо при дуже малих зернах збільшується рівномірність яскравості, але зменшується світлова віддача. При збільшенні зерна зростає світлова віддача, але зменшується рівномірність розподілу яскравості по поверхні люмінофора. За допомогою спеціальних сит люмінофор сортируються за розмірами зерна.

Перелічимо деякі з широко відомих класів люмінофорів:

1. Сульфіди – сірчані сполуки металів, активовані важкими металами, наприклад,  $\text{ZnS} \cdot \text{Ag}$ ,  $\text{ZnS} \cdot \text{Cu}$ ,  $\text{CuS} \cdot \text{Ag}$ , або мають надлишок металу, наприклад,  $\text{ZnS} \cdot \text{Zn}$  (в хімічній формулі люмінофора активатор часто відділяють точкою);
2. Силікати – солі кремнієвої кислоти, активовані важкими металами:  $\text{Zn}_2\text{SiO}_4 \cdot \text{Mn}$ ,  $\text{CdSiO}_4 \cdot \text{Mn}$ ,  $\text{Zn}_2\text{SiO}_4 \cdot \text{Ag}$  і т.і.
3. Вольфрамат – сполуки металів з окислами вольфрама:  $\text{CaWO}_4$ ,  $\text{ZnWO}_4$ ,  $\text{MgWO}_4$  та ін.
4. Селеніди – сполуки селену з різними металами:  $\text{ZnSe}$ ,  $[\text{ZnSe}]\text{S} \cdot \text{Ag}$  та ін.; ці сполуки бувають як з активаторами, так і без них.

Часто для одержання необхідних спектральних характеристик випромінювання люмінесценції люмінофор складається з декількох компонентів, кожна з яких має спектр люмінесценції, характерний для даної компоненти. Проте наявність компонент може привести до появи нових випромінювань, які жодна з компонент не мала, і зникнення випромінювань,

характерних для кожної з компонент. При утворенні люмінофора з двох компонент можуть з'явитися і тушіння, і нові дозволені рівні.

У результаті термічної обробки люмінофор одержує зони провідності, які лежать в області основної речовини люмінофора. У межах зони провідності можна вважати, що електрон рухається з деякою середньою швидкістю від одного вузла ґраток до другого в певних напрямках, зумовлених будовою кристалічних ґраток. Крім зон провідності люмінофор має дискретні рівні, що визначаються як основною речовиною люмінофору, так і значною мірою і домішками.

Властивості люмінофору визначають на основі зонної теорії твердого тіла. Складна технологія виготовлення дуже впливає на властивості люмінофору, робить припущення про мікроструктуру люмінофору дуже наближеними, а розрахунки складними, що дають дуже великі похибки. У наш час намагаються вирішити питання визначення властивостей різних люмінофорів кванто - вомеханічної шляхом. Проте ті ж труднощі, що виникли перед зонною теорією люмінофорів, залишаються і для квантово - механічної теорії.

Кожний кристалофосфор характеризується наступними спектрами:

1) спектром поглинання, який лежить звичайно в ультрафіолетовій області (у видимій частині спектру багато з кристалофосфорів прозорі і мають малі коефіцієнти поглинання);

2) спектром випромінювання, який лежить у видимій або в інфрачервоній частині спектру.

Збудження достатньо широкої смуги спектру випромінювання можливе випромінюванням як із суцільним, так із лінійчастим спектром.

На рис. 5.3 подані спектри випромінювання  $\text{SrS} \cdot \text{Bi}$  при збудженні його лінійчастими спектрами, лінії яких показані на тих же графіках.

На спектральний склад випромінювання впливає спосіб збудження. У простих люмінофорів з одним активатором і однією основою речовиною впливу способу збудження на спектральний склад люмінесценції часто не

спостерігається. Цей вплив значний у складних люмінофорів з декількома активаторами. У такого складного люмінофору спектр люмінесценції може змінюватися, якщо змінюється спектр збудження, бо при цьому змінюється яскравість окремих ліній, характерних для кожного активатора.

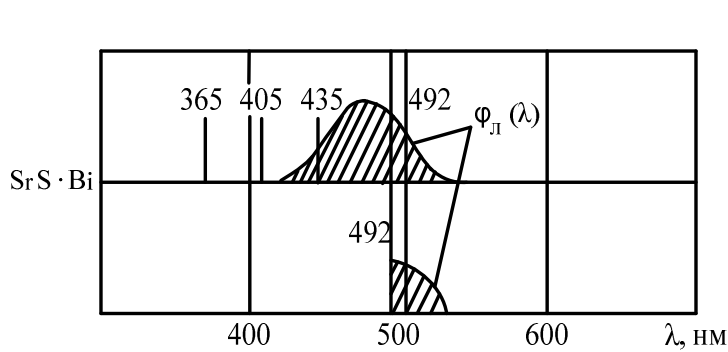


Рис 5.3.

Опроміненість люмінофора також впливає на спектральний склад люмінесценції. Яскравість окремих ліній зростає із зростанням опроміненості по-різному.

Одні лінії досягають максимальної яскравості при одних опасеннях, інші при других, що і змінює спектральний склад випромінювання люмінесценції. Температура люмінофора може впливати на спектральний склад випромінювання люмінесценції. Чим більше глибина метастабільних рівнів, тим більш високою повинна бути температура люмінофору, щоб повернути електрони з метастабільних на дозволені рівні. Є люмінофори, в яких опромінення їх інфрачервоними потоками викликає спалах люмінесценції, якщо люмінофори перед цим були збуджені.

## 5.2. Фотолюмінесценція

При фотолюмінесценції збудження люмінофора виконується за допомогою фотонів оптичного або рентгенівського випромінювання. Цей вид люмінесценції знайшов широке застосування у джерелах світла, де невидимі ультрафіолетові потоки за допомогою люмінофора перетворюються в випромінювання видимої частини спектру.

Коротко зупинимось на закономірностях, що характеризують фотолюмінесценцію.

Для характеристики люмінесценції користуються поняттям спектру збудження і спектром люмінесценції. Під спектром збудження розуміють сукупність монохроматичних потоків випромінювання, за допомогою яких проводиться збудження люмінофору. Спектром люмінесценції називається сукупність монохроматичних потоків випромінювання, випромінюваних люмінофором.

Дослідження спектрів збудження і спектрів випромінювання різних люмінофорів дозволило Стоксу сформулювати правило, яке називається законом Стокса і встановлює зв'язок між спектром збудження і спектром випромінювання: випромінювання люмінесценції має більше довжину хвилі, ніж випромінювання, збуджуюче свічення люмінофора.

Досліди показали, що є ряд люмінофорів, які строго підкоряються закону Стокса, поряд з цим велика кількість люмінофорів цьому закону не підпорядковується. Для одного з таких люмінофорів ( $\text{CdBr}_2 \cdot \text{ZnS}$ ) розташування спектру збудження і спектру люмінесценції наведено на рис.5.4.

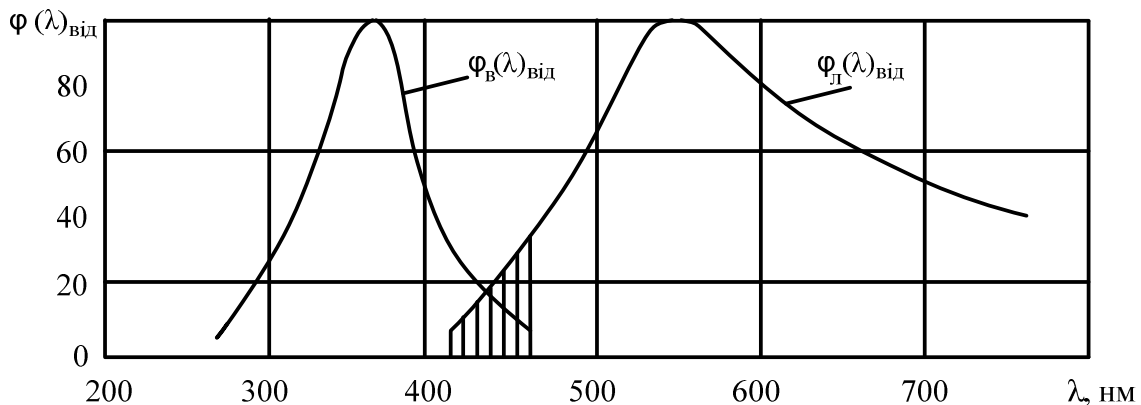


Рис. 5.4.

Заштрихована область називається антистоксовою. Якщо розглядати окремі акти збудження, то можна сказати, що в більшості випадків виникає втрата частини енергії поглинутого люмінофором фотона. Ця втрачена енергія йде на нагрівання люмінофору. Поряд з втратою енергії можливі

випадки, коли до поглинутого кванта додається кінетична енергія електрона, який знаходиться в коливальному русі, при цьому квант люмінесценції може бути вже більше кванта збудження. Таким чином випромінювання в антистоксовій області можливо тільки тоді, коли температура люмінофору досить висока. Ряд дослідів підтверджує, що при зниженні температури випромінювання люмінофору в вище названій області зменшується.

Правило Стокса виконується у люмінофорів з широкою областю спектру випромінювання. Відхилення від закону Стокса для більшого числа люмінофорів дало можливість Ломмелю по-іншому сформулювати закономірність, існуючу між спектром збудження і спектром люмінесценції.

Спектр випромінювання в цілому і його максимум завжди зсунуті в порівнянні зі спектром поглинання і його максимумом в бік довгих хвиль. Ця закономірність має назву закону Стокса – Ломмеля. Цей закон діє майже у всіх випадках.

Розглянуті два закони мають різний фізичний сенс. Закон Стокса стверджує, що кожний поглинутий фотон викликає фотон люмінесценції з більшою довжиною хвилі, при цьому спектр люмінесценції повинен бути зсунутий в бік більших довжин хвиль у порівнянні зі спектром збудження. Ломмель, вносячи свою поправку до закону Стокса, розглядав збудження і випромінювання люмінофора як процеси статистичні, в результаті яких найбільш ймовірним є перетворення частини поглинутої люмінофором енергії в теплову і малоймовірним – перетворення частини теплової енергії люмінофору в енергію випромінювання. Утворення антистоксової області спектру люмінесценції не суперечить закону збереження енергії. Дійсно, в цьому випадку коливальна енергія молекул (а незбуджена молекула завжди має певний запас коливальної енергії) частково перетворюється в енергію люмінесценції. Це і викликає утворення великих квантів люмінесценції, що задовольняють умові

$$h\nu_{\text{люм}} > h\nu_{\text{погл.}}$$

### 5.3. Вихід люмінесценції

Фотолюмінесценція виникає за рахунок поглинутої енергії збудженого світла. Проте тільки частина його перетворюється в енергію люмінесценції. Відрізняють енергетичний вихід люмінесценції  $B_{en}$  - це відношення ефективно перетвореної енергії люмінофору (енергія випромінювання люмінофору)  $E_l$  до енергії поглинання збудженого світла  $E_n$ :

$$B_{en} = E_l / E_n. \quad (5.1)$$

Квантовим виходом люмінесценції називають відношення числа випромінених квантів люмінесценції  $N_l$  до числа поглинутих квантів збудженого світла  $N_n$ :

$$B_{kv} = N_l / N_n. \quad (5.2)$$

Легко встановити співвідношення між цими двома величинами. Справді, оскільки енергія кванта дорівнює  $h\nu$ , то для  $B_{en}$  можна записати

$$B_{en} = (N_l / N_n)(h\bar{\nu}_l / h\bar{\nu}_n) = B_{kv}(\bar{\nu}_l / \bar{\nu}_n), \quad (5.3)$$

де  $\bar{\nu}_l$  і  $\bar{\nu}_n$  - середні ефективні частоти випромінюваного і поглинутого світла,  $h$  - стала Планка. Так як  $\bar{\nu}_n > \bar{\nu}_l$ , то  $B_{en} < B_{kv}$ . С.І. Вавілов показав, що енергетичний вихід люмінесценції розчинів органічних речовин може досягати  $\sim 0,8$ . У цьому випадку величина квантового виходу люмінесценції близька до одиниці. Таким чином, частина енергії збудження практично завжди витрачається на розвиток безвипромінювальних переходів. Ці енергетичні витрати називають *стоксовими втратами*. Так, при збудженні центру свічіння до вищих збуджених станів квантовий вихід люмінесценції може бути таким же, як при збудженні першого збудженого стану. Проте випромінювані в цьому випадку кванти будуть набагато менші квантів збуджуючого світла. Тому  $B_{en}$  буде різко зменшуватися, а стоксові втрати



значно зростатимуть. Чим вище величина  $B_{кв}$ , тим ефективніші флуоресцентні якості речовини. У нелюменісцентних молекул квантова ефективність флуоресценції або дорівнює близька до нуля.

Значення квантових виходів флуоресценції деяких речовин наведені в табл. 5.1

Таблиця 5.1 - Значення квантових виходів флуоресценції  $B_{кв}$  розчинів складних органічних речовин.

Сполука	Розчинник	$B_{кв}$
Родамін 6Ж	етанол	0,94
Родамін 110	- // -	0,91
РодамінБ	- // -	0,73
3 – Амінофталімід	- // -	0,62
Кумарін 120	- // -	0,61
Оксазін 12	- // -	0,58
Крезіловий фіоленовий	- // -	0,56
Оксазін 1	- // -	0,11
Ерітрозін	ацетонітріл	0,33

#### 5.4. Закон Вавілова

С.І. Вавілов встановив залежність енергетичного виходу люмінесценції від довжини збуджуючого світла, відповідно до якої енергетичний вихід люмінесценції спочатку зростає пропорційно довжині хвилі збуджуючого світла, потім в деякому інтервалі довжина хвилі залишається постійною, після чого різко спадає. Ця залежність має загальний характер і одержала назву закону Вавілова. Відповідно до цього закону для кожної речовини характерна деяка гранична довжина хвилі  $\lambda_0$ , при якій спостерігається падіння виходу люмінесценції. На рис. 5.5 подана залежність  $B_{ен}$  від  $\lambda_{зб}$  для розчину барвника флуоресцеїну у воді.

В області довжин хвиль збуджуючого світла, де спостерігається лінійна залежність  $B_{en}$  від  $\lambda_{зб}$ , квантовий вихід люмінесценції повинен бути постійною величиною.

Дійсно, нехай на цій ділянці спектра

$$B_{en} = a\lambda_{зб} = B_{кв} \frac{\bar{V}_л}{V_{зб}} = B_{кв} \frac{\lambda_{зб}}{\bar{\lambda}_л}, \quad (5.4)$$

звідки

$$B_{кв} = a\bar{\lambda}_л = const. \quad (5.5)$$

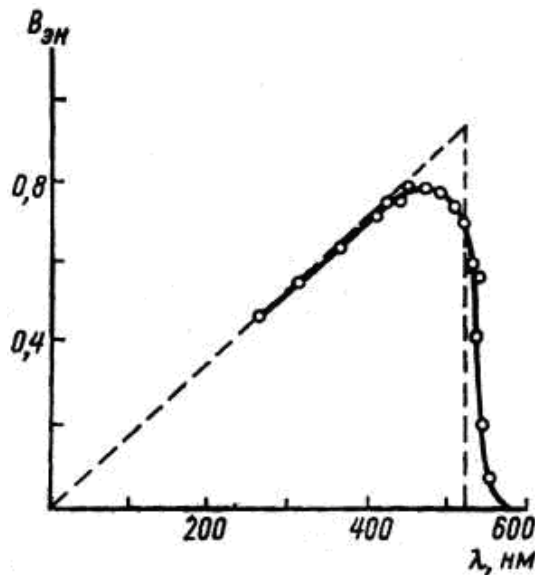


Рис. 5.5 - залежність  $B_{en}$  від  $\lambda_{зб}$  розчину флуоресцеїну у воді.

Таким чином, у всьому спектральному інтервалі, де енергетичний вихід люмінесценції пропорційний довжині хвилі збудження, квантовий вихід свічення зберігає постійне значення.

На рис. 5.6 показана залежність  $B_{кв}(\lambda_{зб})$  для водного розчину флуоресцену (крива 3). Закон Вавілова строго виконується для речовин, які мають властивості люмінесценції. Як приклад на рис 5.6 подані залежності квантового виходу люмінесценції ряду барвників від довжини хвилі збуджуючого світла.

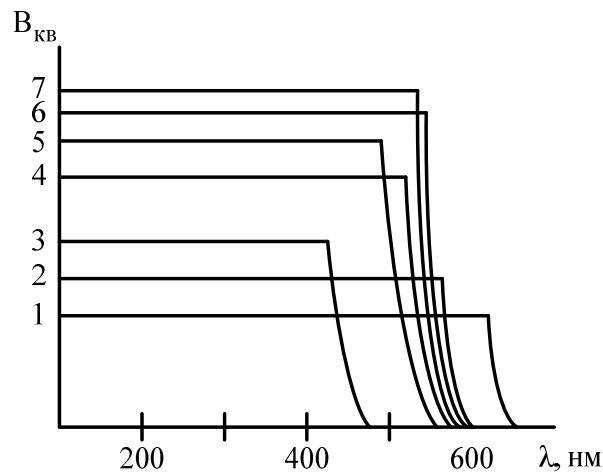


Рис. 5.6 - Залежність квантового виходу люмінесценції барвників від довжини хвилі збудженого світла: 1 - родамін 6Ж; 2 – бенгальська троянда; 3 –  $\beta$  - нафтол; 4 – еозин; 5 – акрідин; 7 – ерітрозин.

### 5.5. Світловий потік фотолюмінесценції

Якщо збудження люмінофору виконується не однорідним потоком випромінювання, то потік, випромінюваний люмінофором, можна визначити з виразу

$$\Phi_{el} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} \varphi_3(\lambda) \alpha(\lambda) B_{en}(\lambda) d\lambda, \quad (5.6)$$

де  $\varphi_3(\lambda)$  – функція спектральної густини потоку випромінювання збудження люмінофору,  $\alpha(\lambda)$  – спектральне значення коефіцієнта поглинання люмінофору;  $B_{en}(\lambda)$  – спектральні значення енергетичного виходу люмінофору.  $\lambda_1$  і  $\lambda_n$  – границі спектра збудження.

Світловий потік фотолюмінесценції

$$\Phi_l = K_l \Phi_{el}, \quad (5.7)$$

де  $K_l$  – світлова ефективність фотолюмінесценції

$$K_l = 683 \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_n} \varphi_l(\lambda) V(\lambda) d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_n} \varphi_l(\lambda) d\lambda}. \quad (5.8)$$

Замінюючи значення  $\Phi_{\lambda}$  і  $K_{\lambda}$  їх інтегральними виразами, одержимо загальне рівняння для світлового потоку фотолюмінесценції

$$\Phi_{\lambda} = 683 \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_n} \varphi_{\lambda}(\lambda) V(\lambda) d\lambda}{\int_{\lambda_1'}^{\lambda_n'} \varphi_{\lambda}(\lambda) d\lambda} \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} \varphi_{\lambda}(\lambda) \alpha(\lambda) B_{en}(\lambda) d\lambda, \quad (5.9)$$

де  $V(\lambda)$  – функція відносної спектральної чутливості ока;  $\lambda_1'$  і  $\lambda_n'$  – границі смуги випромінююмого люмінофором світлового потоку.

## 5.6. Катодолюмінісценція люмінофора

Якщо при фотолюмінесценції один поглинутий люмінофором квант випромінювання в кращому разі дає один квант випромінювання люмінесценції, то при катодолюмінісценції один електрон, що ввійшов у шар люмінофору, може створити ряд вторинних електронів, частина із яких здатна збуджувати атоми люмінофору. Таким чином, один поглинутий люмінофором електрон може стати причиною одержання ряду фотонів люмінесценції. Вторинні електрони заряджають люмінофор від'ємно, що викривляє електронний пучок і зменшує енергію кожного електрона, який потрапив на поверхню люмінофору.

Явище катодолюмінісценції складніше, ніж явище фотолюмінесценції, але незважаючи на це воно знаходить широке технічне застосування в різних електронно-промислових приладах.

При збудженні електронним променем люмінофор може випромінювати в ультрафіолетовій, видимій і інфрачервоній областях спектра. Значна кількість енергії при цьому перетворюється в теплоту. Кількість теплоти настільки велика, що достатньо зупинити електронний промінь, як швидко не тільки вигорає люмінофор, але й проплавляється скло колби трубки в тому місці, де вона стикається з електронним променем.

В якості люмінофорів застосовуються кристаллофосфори. У простих за складом однокомпонентних люмінофорів спектр випромінювання не залежить від способу збудження. Спектр випромінювання люмінофору визначається хімічним складом основної речовини і активатором. Можна значно змінити спектральний склад випромінювання однокомпонентного люмінофору, замінивши тільки один активатор іншим. На рис. 5.7 подані спектри люмінесценції сульфіда цинку з різними активаторами. Випромінювання простого люмінофора займає порівняно вузьку частину спектру і за кольоровістю дуже відрізняється від випромінювання будь-якого стандартного джерела білого кольору. Тому для одержання випромінювання люмінесценції заданої кольоровості доводиться змішувати в певних пропорціях два або три люмінофори. Якщо люмінофор двокомпонентний, то, міняючи співвідношення компонент, змінюють і спектральний склад випромінювання такого люмінофору.

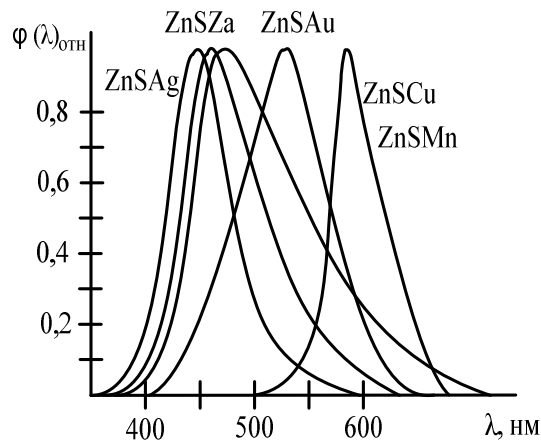


Рис 5.7.

### 5.7. Гасіння люмінесценції

Явище послаблення люмінесценції внаслідок введення сторонніх речовин має назву гасіння люмінесценції. Механізм цього процесу ясний для випадку резонансної флуоресценції газів. Атом знаходиться у збудженому

стані в середньому  $10^{-8}$ - $10^{-9}$ с. За цей час може відбутися зіткнення збудженого атома з будь-яким атомом або молекулою домішок. При цьому може трапитись так, що енергія збудженого атома передається частинці, яка з ним зіткнулася, і витрачається на будь-які процеси, що відбуваються в даній частинці, або переходить в тепло (зіткнення другого роду). Таким чином, частина збуджених атомів втрачає можливість брати участь у випромінюванні, і внаслідок цього виникає зменшення (гасіння) початково спостережуваної люмінесценції. Замість неї може виникнути хімічна реакція з молекулою, яка сама не поглинає світла, але запозичує його від збудженого атома (так звана сенсibiliзована фотохімічна реакція). Поглинута енергія, передана при зіткненні другій частинці, може бути використана на збудження останньої і викликати її люмінесценцію (стабілізована люмінесценція).

У випадку люмінесценції рідких (і твердих) речовин також спостерігається гасіння; наприклад інтенсивність люмінесценції багатьох розчинів дуже зменшується при введенні йодистого калію. Можливо, що в цих випадках присутність гасильника викликає перехід енергії збудження люмінесцентуючої молекули до молекули цього ж гасильника. Укінцевому рахунку енергія, яка забрана у збуджених молекул, звичайно розподіляється серед всієї речовини, не дуже нагріваючи її. Подібні явища гасіння спостерігається і при підвищенні концентрації люмінесцентуючої речовини (так зване концентраційне гасіння).

Дослід показує, що значне підвищення концентрації речовини звичайно (дуже знижує вихід фотолюмінесценції, і при дуже великих концентраціях він стає незначним, як приклад наведено на рис.5.8, який показує падіння виходу люмінесценції водного розчину флуоресцеїну з підвищенням його концентрації.

Не виключено, що присутність тих або інших агентів гасіння зумовлює зменшений вихід флуоресценції, який спостерігається в багатьох випадках. Навпаки, дуже збільшена яскравість флуоресценції, яка виявлена, наприклад,

при додаванні лужних металів до водяних розчинів флуоресцеїну, пов'язано із зменшенням концентрації водневих іонів, які викликають дію гасіння.

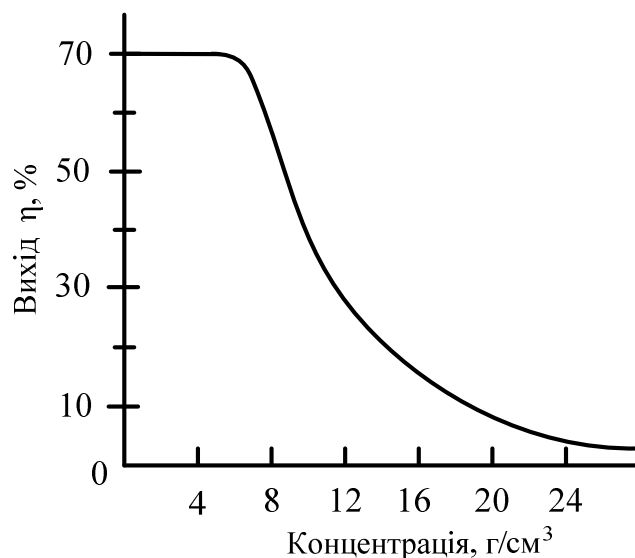


Рис. 5.8 - Залежність виходу люмінесценції від концентрації флуоресцеїну.

Механізм концентраційного гасіння, у тій же мірі, що і гасіння сторонніми домішками в рідинах, тобто процес переходу енергії збудження в тепло, можна встановити тільки на основі детальних відомостей про будову молекули й середовища.

## 5.8. Люмінесцентні лампи

У 1920 році виявили, що розряд в атмосфері пару ртуті і інертного газу, тиск якого в сотні раз вище, ніж пару ртуті, дозволяє одержати ультрафіолетове випромінювання ( $Y\bar{\Phi}$ ). За оптимального тиску пару ртуті майже 60% електричної енергії позитивного стовпа розряду перетворюється в монохроматичне випромінювання резонансної лінії ртуті з  $\lambda = 253,7$  нм. Проте тільки багатьох років напруженої роботи вчених багатьох країн вдалося вирішити проблему перетворення цього випромінювання в видиме і організувати масовий випуск люмінесцентних ламп.

Люмінесцентні лампи – це лампи низького тиску, в розрядному проміжку яких знаходяться пари ртуті при тиску від 0,8 до 1,33 Па (від 0,006 до 0,01 мм.рт.ст.) і аргон або інший інертний газ під тиском в декілька сотень Па. Аргон служить для поглинання загорання лампи, захищає катод від інтенсивного руйнування і підвищує світлову віддачу лампи.

Основною перевагою люмінесцентних ламп є їх значно більш висока віддача, ніж у ламп розжарювання.

У наш час стандартизовані люмінесцентні лампи дають світловий потік 3200 лм, відповідно світлову віддачу  $80 \text{ лм} \cdot \text{Вт}^{-1}$ . Нові ЛЛ з полосатим спектром, який одержується сумішшю декількох люмінофорів за забезпечує світлову віддачу більше  $90 \text{ лм} \cdot \text{Вт}^{-1}$ , достатню якісну кольоропередачу і середній термін служби 10 тис. год.

Люмінесцентні лампи мають достатньо просту конструкцію. Проте технологічний процес виробництва ЛЛ складний і разом з якістю матеріалів, які використовують для виготовлення різних конструктивних елементів ламп, впливає на їх світлотехнічні і експлуатаційні параметри. Загальний вигляд ЛЛ з підігрівними катодами показано на рис. 5.9.

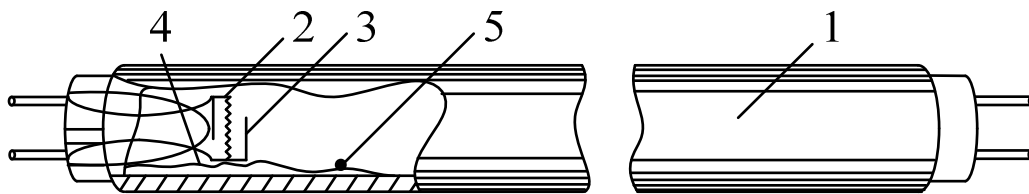


Рис. 5.9.

В скляну довгу циліндричну колбу 1, на внутрішню поверхню якої нанесено шар люмінофора 4, запаяні два електрона 2, які виконані у вигляді вольфрамової біспіралі, покритої шаром оксиду, який зменшує роботу виходу електрона і забезпечує значно більшу емісію електронів, ніж чиста поверхня вольфраму.



Екрани 3, в найпростішому випадку це відрізки нікелевої проволочки, розташовані перед електронами. Екрани полегшують роботу електродів в анодний на півперіод, зменшуючи тим самим розпилювання оксидного шару.

У лампу вводиться крапля ртуті 5 вагою 30 – 80 мг і інертний газ, звичайно аргон, тиск якого в лампі (2,5 – 3 мм.рт.ст.). Інколи застосовують для заповнення люмінесцентних ламп і інші інертні гази або їх суміші.

При роботі ЛЛ розряд проходить в атмосфері насиченого пару ртуті.

За формою колби ЛЛ розділяються на прямі циліндричні (найбільш розповсюджений вид ламп), секційно – кільцеві, кільцеві і U – образні.

Люмінофори, які застосовуються в ЛЛ, визначають спектральний склад їх випромінювань і світлову віддачу. До люмінофорів ЛЛ пред'являються наступні вимоги:

- 1) максимум спектральної чутливості люмінофора повинен співпадати з максимум густини потоку збуджуючого випромінювання;
- 2) люмінофор повинен мати великий коефіцієнт поглинання для збуджуючого випромінювання і малий для світлового потоку;
- 3) спектр люмінесценції люмінофора повинен задовольняти вимогам, пред'явлених до спектрального складу випромінювання лампи;
- 4) параметри люмінофора повинні бути стабільними при зберіганні і роботі лампи;
- 5) люмінофор повинен:
  - а) мати високий квантовий вихід;
  - б) не вступати в хімічну сполуку з матеріалом електродів і колбою лампи;
  - в) бути дешевим;
  - г) не мати токсичної дії;
  - д) наноситись рівномірним шаром на стінки колби і міцно триматися на них.

У наш час розроблені люмінофори, які відповідають вказаним вимогам.

Для люмінесцентних освітлювальних ламп застосовується галофосфоткальцію (ГФК), активований Mn і Sb. Максимум смуги випромінювання марганцю – 580 нм, сурми – 480 нм. Змінюючи концентрацію активаторів, вдається змінювати спектральний склад люмінесценції таким чином, що зміна кольоровості відбувається за кривою зміни кольоровості чорного тіла.

Для декоративних ЛЛ застосовують в якості люмінофора вольфраму, силікати і інші кристалофосфори.

В ЛЛ звичайного типу шар люмінофору представляє собою повністю замкнену порожнину, свічення якої збуджується із середини. Потік люмінесцентної лампи  $\Phi_{\text{люм}}$  складається із частини початково збудженого потоку, який пройшов через шар люмінофору зовні,  $\Phi_{\text{люм1}}$  і частини відбитого в середину лампи початково збудженого потоку  $\Phi_{\text{люм2}}$ , помноженого на коефіцієнт багаторазових відбиттів і коефіцієнт пропускання шару:

$$\Phi_{\text{люм}} = \Phi_{\text{люм1}} + \Phi_{\text{люм2}} \frac{\bar{\tau}_{\text{люм}}}{1 - \bar{\rho}_{\text{люм}}} \quad (5.10)$$

де  $\bar{\tau}_{\text{люм}}$  і  $\bar{\rho}_{\text{люм}}$  - відповідно коефіцієнти пропускання і відбиття шару люмінофору для люмінофора для люмінесценції. Якщо  $\bar{\tau}_{\text{люм}}$  і  $\bar{\rho}_{\text{люм}}$  залежать від довжини хвилі, то другий член виразу (5.10) прийме вигляд

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Phi_{\text{люм2}} \frac{\tau(\lambda)}{1 - \rho(\lambda)} d\lambda \quad (5.11)$$

Загальний потік випромінювання ЛЛ дорівнює сумі потоків люмінофора і видимих ліній ртуті, які виходять із лампи

$$\Phi_{\text{л}} = \Phi_{\text{люм}} + \sum_{\lambda_{\text{вид}}} \Phi_{\text{рт}}(\lambda) \frac{\tau(\lambda)}{1 - \rho(\lambda)} \quad (5.12)$$

де  $\Phi_{\text{рт}}$  - потоки випромінювання видимих ліній ртуті;  $\tau(\lambda)$  і  $\rho(\lambda)$  - коефіцієнти пропускання і відбиття шару для відповідних ліній.

Оскільки в ЛЛ випромінювання видимих ртутних ліній складає не більше 10-13% випромінювання люмінофора, в першому наближенні достатньо розглянути тільки вираз для  $\Phi_{\text{люм}}$ .

Вважаючи, що шар випромінює дифузно і що яскравості  $L_{\text{люм1}}$  і  $L_{\text{люм2}}$  рівномірні по всій поверхні лампи, одержимо

$$\Phi_{\text{люм}} = \pi S_{\text{люм}} \left[ L_{\text{люм1}} + L_{\text{люм2}} \frac{\bar{\tau}_{\text{люм}}}{1 - \bar{\rho}_{\text{люм}}} \right] \quad (5.13)$$

де  $S_{\text{люм}}$  - площа поверхні шару люмінофора.

Задача, таким чином, зводиться до знаходження значень  $L_{\text{люм2}}$ ,  $\bar{\tau}_{\text{люм}}$  і  $\bar{\rho}_{\text{люм}}$  для плоского шару в залежності від його характеристик.

Можна показати, що для багатьох практичних розрахунків з ЛЛ можна допустити, що випромінювання люмінесценції виникає не у всьому об'ємі, а в дуже тонкій плівці, яка прилягає до його внутрішньої поверхні. Тоді

$$\Phi_{\text{люм}} \approx \frac{\bar{\tau}_{\text{люм}}}{1 - \bar{\rho}_{\text{люм}}} \sum_{\lambda=254 \text{ і } 185} \frac{\alpha_{\text{уф}}(\lambda)}{1 - \rho_{\text{уф}}(\lambda) \delta_{\text{уф}}(\lambda)} \gamma(\lambda) \Phi_{\text{уф}}(\lambda) \quad (5.14)$$

де  $\alpha_{\text{уф}}(\lambda)$  - коефіцієнт поглинання,  $\gamma(\lambda)$  - енергетичний коефіцієнт корисної дії перетворення збудженого випромінювання,  $\delta_{\text{уф}}(\lambda)$  - доля відбитого шаром потоку, який досягнув поверхні з врахуванням поглинання в середовищі.

Нижче приведені в якості приклада значення коефіцієнтів  $\alpha$ ,  $\rho$  і  $\tau$  для стандартного шару люмінофора в УФ і видимій (люмінесценція) областях спектра.

Величина	Ультрафіолетове випромінювання	Видиме світло (люмінесценція)
$\tau$	0,001	0,44
$\rho$	0,20	0,54
$\alpha$	0,80	0,02

Очевидно, що шар люмінофора дуже поглинає УФ і дуже слабо видиме випромінювання. Помітне значення мають  $\rho_{\text{уф}}$  і  $\rho_{\text{люм}}$ .

## Список література

1. Вавилов С.И. Собрание починений. Т.1. - М; Изда - во АН СССР, 1954.
2. Левшин Л.В., Салецкий А.М. Люминесценция и ее измерение - М Издат-во Моск. Ун-та, 1989, - 279 с.
3. Гуторов М.М. Основы светотехники и источников света - М.; Энергоатомиздат, 1983.-384с.
4. Степанов Б. Н., Грибковский В.В. Введение в теорию люминесценции.- Минск; Изд-во АНБССР, 1963.
5. Верещагин И.К. Электр люминесценция кристаллов. - М; Наука, 1974.
6. Красовицкий Б.М., Болотин Б.М., Органические люминофоры. - М, 1984.

## Питання для самоперевірки

1. В чому полягає відмінність люмінесценції від інших видів випромінювання?
2. Який фізичний механізм люмінесценції?
3. Які є приклади люмінесценції в природі?
4. Які існують види люмінесценції за механізмом збудження?
5. Яке визначення люмінесценції за С.І. Вавіловим?
6. Що таке спонтанне свічіння люмінесценції?
7. Що таке вимушене свічіння люмінесценції?
8. Який механізм рекомбінційного свічіння люмінесценції?
9. Що впливає на спектральний склад випромінювання люмінесценції?
10. Що таке кристалофосфори?
11. Які є класи кристалофосфорів?

12. Сформулюйте закон Стокса.
13. Що таке антистоксова область?
14. В чому полягає закон Стокса-Ломмеля?
15. В чому полягає відмінність закону Стокса і закону Стокса-Ломмеля?
16. Що таке квантовий вихід?
17. Що таке енергетичний вихід люмінесценції?
18. Що таке стоксові витрати?
19. В якому спектральному інтервалі квантовий вихід зберігає постійне значення?
20. Запишіть світловий потік фотолюмінісценції.
21. Які механізми гасіння люмінесценції?
22. Який механізм роботи люмінесцентних ламп?

## 6. ГАЗОРОЗРЯДНІ ПРОЦЕСИ

Процес проходження електричного струму в газовому середовищі називається електричним газовим розрядом. В елементарних явищах, які визначають проходження струму в газі, будуть участь різні мікрочастинки електрона, позитивні й від'ємні іони, нейтральні атоми й молекули, а також кванти електромагнітного випромінювання.

Газ – гарний діелектрик, проте при достатньо великих напруженостях зовнішніх полів його провідності різко збільшується за рахунок підвищення концентрації заряджених частинок.

Пробій – це суттєво нестаціонарний процес бурхливої іонізації газу, перетворення неіонізованого газу в провідну плазму, що виникає при швидкому «включенні» достатньо сильного зовнішнього поля. Звичайно іонізація починається з невеликої кількості «затравочних» електронів, які з тих або інших причин, часто випадковими, попадають у газ. Під дією поля вільний електрон набирає енергію, достатню для виривання електрона із атома, і іонізує атом, витрачаючи на відрив свою енергію. У результаті замість одного появляються два повільних електрони, вони знову набирають енергію, іонізуються, утворюючи чотири електрони і т.д. Так розвивається електронна лавина і виникає пробій. Ймовірно, кожному будь-коли доводилося бути свідком короткого замикання.

У момент перед стикання проводів у повітрі між ними проскакує іскра. Це виникає пробій повітряного проміжку між проводами, які знаходяться під напругою.

Розвиток електронної лавини в постійному полі має нелокальний характер. Всі електрони, і початкові, і тільки народжені безперервно рухаються уздовж поля зі швидкістю дрейфу, якщо довжина пробігу багато менше відстані між електродами, і «розмножується» в ході цього систематичного руху, який накладається на хаотичний.

Лавина наростає не тільки в часі, але й і в просторі (див. рис. 6.1).

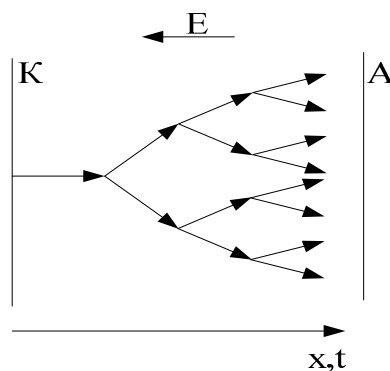


Рис. 6.1 - Схема лавинного розмноження електронів у проміжку між катодом К і анодом А

При цьому поле весь час виносить електрони з області розряду на анод і необхідно безперервно компенсувати витрати шляхом емісії з катодом. У змінному полі досить низької частоти процес може бути ще більш складним: не встигне сформуватися будь-яка стійка картина, подібна до процесу в постійному полі, як поле змінює напрямок на протилежний, анод і катод міняються ролями і лавина з «півшляху» повинна розповсюджуватися в інший бік.

У цьому відношенні дуже високі частоти, за яких амплітуда коливань електрона мала в порівнянні з всіма іншими характерними розмірами (довжина хвилі гармонічного поля, розміри області, де поле сильне, відстань до стінок розрядної камери, в якій знаходиться газ), надають найбільш сприятливі умови для рівномірного розвитку лавини в цьому місці. Процес має об'ємний, локалізований характер, бо швидко зміна напрямку сил, яка діє з боку поля, перешкоджає витягуванню зарядів полем.

### 6.1. Частота іонізації і коефіцієнт Таунсенда

Нелокальний характер іонізаційного процесу в постійному полі накладає відбиток і на основну характеристику швидкості іонізації. Для локалізованого процесу це – частота іонізації електронним ударом  $\nu_i$ , тобто кількість електронів, яка в середньому народжує один електрон в даній точці

простору в 1 секунду. Якщо густина електронів  $n_e$ , то число актів народжених в 1с в  $1 \text{ см}^3$ , є

$$(dn_e / dt)_i = \nu_i n_e. \quad (6.1)$$

Частота іонізації залежить від енергетичного спектра у електронів, тобто від поля. У випадку постійного поля часова характеристика не настільки показова, бо лавина наростає уздовж напрямку руху електрона  $x$  протилежного напрямку вектора поля  $\vec{E}$ . Адекватною характеристикою служить так званий перший іонізаційний коефіцієнт Таунсенда  $\alpha$  – число електронів, яке в середньому народжує один електрон на шляху в 1 см, що рухається в напрямку -  $\vec{E}$ . Зростання числа електронів у лавині описується при цьому рівнянням

$$dN_e / dx = \alpha N_e, \quad (6.2)$$

де  $N_e dx$  - число електронів у шарі товщиною  $dx$ , а  $N_e$  - «лінійна» густина. Її можна замінити в цьому рівнянні звичайною «об'ємною» густиною тільки в тому виразі, якщо відсутні поперечні градієнти.

В іншому випадку, наприклад якщо лавина розпливається в поперечних напрямках внаслідок дифузії електронів або поле  $\vec{E}$  має просторові неоднорідності, густина  $n_e$  змінюється уздовж осі  $x$  не тільки за рахунок іонізації.

Шлях  $dx$  електрони проходять за час  $dt = dx / v_D$ , де  $v_D$  - швидкість дрейфу в полі  $\vec{E}$ . На цьому шляху він народжує  $\alpha dx$  електронів, а за 1сек -  $\alpha dx / dt$  електронів. Звідси одержуємо зв'язок частоти іонізації з іонізаційними коефіцієнтами:

$$\nu_i = \alpha v_D. \quad (6.3)$$

Необхідно, проте, мати на увазі, що «первинною» величиною, яка строго розраховується за допомогою функцією розподілу електронів, є частота іонізації.



Іонізаційний коефіцієнт Таунсенда

$$\alpha = \nu_i / \nu_D \quad (6.4)$$

- величина похідна. При цьому швидкість дрейфу  $\nu_D$  також обчислюється строго через функцію розподілу.

## 6.2. Ефективні перерізи

Ефективні розряди можуть з'являтися в газовому середовищі в результаті елементарних актів взаємодії (зіткнень) частинок.

При малих енергіях частинок, що стикаються, можливі лише пружні зіткнення, в результаті яких зберігається незмінною сумарна кінетична енергія частинок. З підвищенням енергії підвищується ймовірність зіткнень, за яких частина кінетичної енергії переходить у внутрішню енергію частинок (непружні зіткнення першого роду). Можливий і обернений перехід – сумарна кінетична енергія часток, що стикаються, збільшується за рахунок їх внутрішньої енергії (непружні зіткнення другого роду). У процесі непружного зіткнення атом перейде у збуджений стан, якщо його внутрішня енергія збільшується не менш ніж на  $eV_1$ , де  $V_1$  - перший потенціал збудження атома. Якщо ж передана атому енергія перевищує енергію іонізації  $eV_i$  ( $V_i$  - потенціал іонізації), то один з валентних електронів може бути видалений з атома з утворенням позитивного іона. Ймовірність актів збудження або іонізації характеризується так званим ефективним перерізом.

Поняття ефективних перерізів розглядається в кінетичній теорії газів, де визначається ймовірність різних взаємодій частинок.

Якщо потік частинок з концентрацією  $n$  проходить через шар газу одиночного розряду, то в результаті актів взаємодії, які приводять до розсіяння частинок потоку, їх концентрація на шляху  $dx$  зменшується на величину  $|dn|$ , пропорційну  $n$ ,  $dx$  і концентрації атомів газу  $N_0$ :

$$dn = -\sigma n(x) N_0 dx \quad (6.5)$$

Знак мінус означає зменшення концентрації потоку на ділянці  $dx$ . Коефіцієнт пропорційності  $\sigma$  називають ефективним перерізом взаємодії для однієї частинки.

Інтегрування виразу (6.5) дає закон зменшення концентрації частинок потоку за рахунок актів взаємодії в газовому середовищі. Якщо  $\sigma$  і  $N_0$  не залежить від  $x$ , то

$$n(x) = n_0 e^{-\sigma N_0 x} = n_0 e^{-Qx} \quad (6.6)$$

де  $n_0$  - початкова концентрація (при  $x = 0$ ).

Величина  $Q = \sigma N_0$  являє собою ефективний переріз взаємодії на одиницю об'єму. Вираз  $Q = \sigma N_0$  свідчить про те, що можна знехтувати перекриттям розрізів окремих атомів газу взаємодії і вважати сумарний ефективний переріз в одиниці об'єму рівним сумі ефективних перерізів атомів газу в цьому об'ємі.

Якщо позначити середню відстань, яку проходить частинка між двома актами взаємодії (середню довжину вільного пробігу), через  $\Lambda$

$$dn = -n \frac{dx}{\Lambda}, \quad (6.7)$$

і відповідно

$$\Lambda = \frac{1}{\sigma N_0} = \frac{1}{Q}, \quad (6.8)$$

тобто  $Q$  визначає середнє число актів взаємодії, яка відчуває частинка на одиницю свого шляху.

Ефективні перерізи пружних зіткнень можна досить добре розрахувати за законами класичної фізики, тоді як для напружених зіткнень необхідне врахування квантово-механічних ефектів. Розглянемо перш за все пружні зіткнення. Потенціал сил взаємодії між частинками залежить від відстані між ними за законом  $V \sim r^{-m}$ , де  $m$  - визначається видом і енергією частинок. Для розрахунку траєкторії частинки при пружному зіткненні необхідно вирішити сумісне рівняння законів збудження кінематичної енергії (потенціальна

енергія при пружному зіткненні не змінюється) і імпульсу. Тоді, знаючи початкові швидкості й прицільний параметр – найменшу відстань між початковими траєкторіями частинок, одержимо значення їх нульових відхилень після зіткнення.

Для опису ймовірності розсіяння електронів на різні кути вводять поняття диференційного ефективного перерізу розсіяння на кут  $\theta$ .

Виділимо з потоку електронів, які рухаються відносно атома газу, ту його частинку, для якої прицільні параметри початкових траєкторій лежать в межах  $b$  до  $(b + db)$ . Виділена частина потоку пройде через кільцеву область з внутрішнім радіусом  $b$  і шириною  $db$ , центр якої розташований в місці знаходження атома. Площа кільця  $2\pi b db$ . Електрони, відхилившись в результаті взаємодії з атомом на кут  $\theta$ , проходять через тілесний кут  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$  з кутом розкриття  $\theta$ .

За визначенням диференційний ефективний переріз  $\sigma(v; \theta)$ , помножений на  $d\Omega$ , дорівнює відношенню числа електронів, відхилившись на кут  $\theta$  в тілесному куті  $d\Omega$ , до числа електронів, які підійшли в цей час до одиниці площини. Позначивши потік електронів, які підійшли через  $\theta$ , можна записати

$$\sigma(v; \theta) d\Omega = \frac{G 2\pi b db}{G} = 2\pi b db. \quad (6.9)$$

Добуток  $G 2\pi b db$  дорівнює потоку електронів через кільце площею  $2\pi b db$ . Звідси

$$\sigma(v; \theta) = 2\pi b \frac{db}{\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \cdot \frac{db}{d\theta}. \quad (6.10)$$

При  $\theta \rightarrow 0$  величина  $\sigma(v; \theta)$  прагне до нескінченності, що свідчить про велику ймовірність розсіяння на малі кути. Для одержання інтегрального ефективного перерізу пружного розсіяння електронів необхідно проінтегрувати диференціальний розріз за всіма кутами  $\theta$ :

$$\sigma(v) = \int_{\theta=0}^{\pi} \sigma(v; \theta) d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma(v; \theta) \sin \theta d\theta. \quad (6.11)$$

Розріз  $\sigma(v)$  характеризує повне число розсіяння електронів, віднесене до одиничної густини потоку падаючих частинок.

Направлений рух електронів під дією зовнішнього поля в значній мірі визначається втратами швидкості (імпульсу) при зіткненнях з частинками газу. Вплив пружних зіткнень на рух електронів враховується введенням інтегрального ефективного перерізу для передачі імпульсу (транспортного перерізу)  $\sigma_m$ .

Якщо частинка з масою  $m_1$  зіткнеться з частинкою, маса якої  $m_2$ , то при розсіянні на кут  $\theta$  імпульс першої частинки зміниться:

$$\Delta \vec{p}_1 = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - \cos \theta) \vec{V}, \quad (6.12)$$

де  $\vec{V}$  - вектор відносної швидкості до зіткнення.

При пружних зіткненнях електрона з повільним атомом помноження імпульсу електрон в напрямку початкового руху змінюється на  $\Delta \vec{p}_1 = p(1 - \cos \theta)$  тому у формулах для транспортного перерізу появляється множник  $(1 - \cos \theta)$ :

$$\sigma(v) = \int_{\theta=0}^{\pi} \sigma(v; \theta) (1 - \cos \theta) d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma(v; \theta) (1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (6.13)$$

У рівняння руху електрона в газі входить довжина вільного пробігу обчислена на основі транспортного розрізу. Для цього необхідно скористатися формулою (6.8), підставивши в ній  $\sigma_m(v)$ . У конкретних задачах необхідно враховувати розподіл всіх частинок, які зіштовхуються за швидкостями і при розрахунку  $\sigma_m$  проводити усереднення.

Для кулонівської взаємодії заряджених частинок, наприклад, для розсіяння потоку електронів іонами газу, коли потенціал сил взаємодії повільно спадає з відстанню, врахування далеких взаємодій відповідаючи слабким відхилення електронів ( $\theta \rightarrow 0$ ), дає інтеграл у формулі (6.13), який розходиться. Для одержання наближеного кінцевого результату доходитья вводити обмежено на відстань, при якій враховується дія кулонівських сил.

Мінімальна відстань визначається так званим радіусом ближньої взаємодії  $b_0$  – відстанню, при якій взаємна потенційна енергія часток, що зіткаються дорівнює за абсолютною величиною подвоєній кінетичній енергії їх відносного руху. Для електрона і позитивного іона й зарядом  $z_e$

$$b_0 = \frac{z_e L}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2}. \quad (6.14)$$

За максимальну відстань приймають дебалівський радіус  $r_D$  – радіус області, за межами якої екранується поле заряду, винесеного в плазму (див. 6.10). З урахуванням цих обмежень, взявши інтеграл у формулі (6.13),

$$\sigma_m(v)b = 4\pi b_0^2 L, \quad (6.15)$$

де  $L = \ln \frac{r_D}{b_0}$  - кулонівський логарифм (величина в межах від 1 до 20).

Електрони в газовому розряді стикаються не тільки з іонами, але й з іншими електронами, а також з нейтральними атомами і молекулами. Для знаходження частоти зіткнень електрона з передачею імпульсу необхідно скласти частоти зіткнень з усіма видами частинок:

$$\nu_m = \sum_e \nu_{me} = \sum_e \sigma_{me} v_e N_{0e} \quad (6.16)$$

де  $\nu_{me}$  і  $\sigma_{me}$  – частота і транспортний переріз зіткнення з частинами сорту L,  $v_e$  - відносна швидкість. Відмітимо, що ефективний переріз пружного розсіяння електронів на нейтральних частинках значно менше, ніж при кулонівському розсіянні, проте цей процес має суттєве значення в слабо іонізованому газі для встановленого розподілу частинок за енергією.

При недружних зіткненнях в рівнянні закону збереження енергії з'являється член  $\Delta E$ , який характеризує зміну потенціальної енергії частинок за рахунок переходу в неї частини кінетичної енергії. Найбільше значення тут мають зіткнення електронів з атомами газу, що закінчуються збудженням або іонізацією атома. Для характеристики цих процесів використовують

поняття ефективних перерізів, які можуть бути виражені через транспортний перерізів  $\sigma_m$  і ймовірності  $w_{зб}$  і  $w_i$  збудження і іонізації при зіткненнях:

$$\begin{aligned}\sigma_{зб} &= \sigma_m w_{зб}, \\ \sigma_i &= \sigma_m w_i.\end{aligned}\tag{6.17}$$

Ефективні перерізи на одиницю об'єму  $Q_{зб} = \sigma_{зб} N_0$   $Q_i = \sigma_i N_0$  визначають кількість актів збудження або іонізації, яку виробляє електрон на одиниці шляху.

Графіки залежності  $Q_i$  і  $Q_{зб}$  від енергії електрона являється собою криві з максимумом (рис.6.2, а і б)

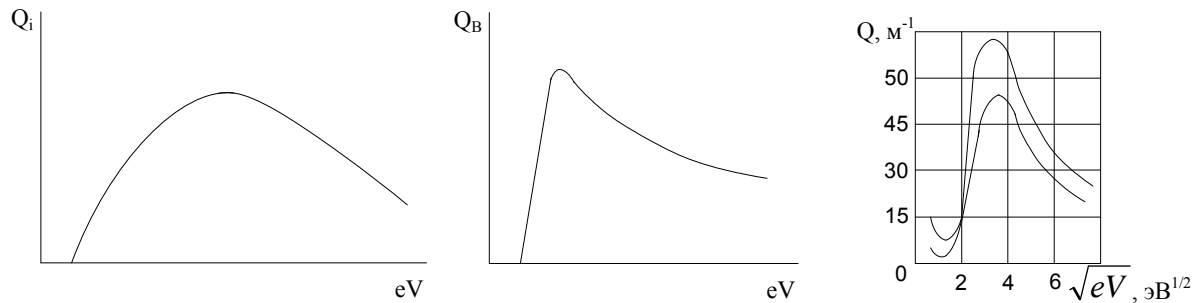


Рис. 6.2.

Максимальна ймовірність збудження атома відповідає енергії електрона тільки дещо більшій енергії збудження, тоді як максимум ймовірності іонізації приходить на енергії електрона порядку декількох десятків або навіть сотень електрон-вольт для різних типів газу.

Ефективні перерізи збудження і іонізації помітно зростають при наявності в спектрі атомів газів метастабільних енергетичних рівней, з яких правилами відбору заборонений самовільний перехід електронів на більш низькі рівні. Електрон покидає метастабільний рівень лише у процесі зіткнення атома з другою частинкою або фотоном. Тому середній час перебування атома у збудженому стані за наявністю метастабільних рівней збільшується з  $10^{-8} - 10^{-9}c$  до  $10^{-4} - 10^{-2}$  і зростає ймовірність ступеневого

збудження або ступеневої іонізації, коли вільний електрон передає свою енергію збудженому атому, який знаходиться в метастабільному стані. При цьому, очевидно, для збудження або іонізації атома потрібна енергія, менше ніж енергія при прямому збудженні або іонізації.

Можливість ступеневої іонізації визначається також процесом резонансного збудження атомів газу. Річ у тому, що із збудженого стану атом може перейти, випустивши квант світла, який поглинеться іншим атомом і, в свою чергу, приведе його у збуджений стан. Послідовна передача збудження від атома до атома (до тих пір, доки квант не покине розрядний проміжок) збільшує ефективний час перебування системи у збудженому стані і сприяє процесу суттєвої іонізації.

Залежність повного ефективного перерізу розсіяння електрона  $Q$  від його швидкості наведена на рис. 6.1 для інертних газів при  $p=1$  Па і  $T=273$  К. Величина  $Q$  може бути перерахована для інших тисків і температур помножених на  $p_0 = \frac{273}{T} p$ . Аналогічно перерізам збудження і іонізації повний переріз має максимум при певних значеннях енергії електрона. У той же час газове середовище майже не розсіює потоку електронів з енергіями порядку 1еВ. Тут проявляються хвильові властивості електронів, у їх дифракції на атомах газу (ефект Рамзауера).

Ефект Рамзауера – аномальна (з позицій класичної фізики) взаємодія електронів з нейтральними атомами деяких газів, яка полягає в різкому зменшенні розрізу пружного розсіяння електрона при невеликих ( $\approx 1$ еВ) енергіях зіткнення.

Рамзауера ефект полягає в наявності глибокого мінімуму в перерізі розсіяння, в декілька разів меншого, ніж переріз розсіяння за нульовою енергією електронів.

При високих температурах і тисках процес іонізації має суттєве значення, бо приводить до термічної іонізації газу за рахунок енергії теплового руху. Легше за все термічна іонізація виникає в газах з низьким

потенціалом іонізації атомів, особливо в парах лужних металів. Висока ступінь іонізації досягається тут вже при температурі 3000K, тоді як для іонізації інертних газів необхідні температури вище 10000K (при тисках у декілька сотен паскалей).

Важливе значення мають процеси збудження і іонізації атомів газу квантами світла. Для прямої фотоіонізації енергія кванта повинна перевищувати енергію іонізації  $e_i V_i$ , тобто випромінювання повинно відповідати далекій ультрафіолетовій частині спектру. Проте можливий і процес ступеневої фотоіонізації, коли фотони тільки переводять атом у збуджений стан, а допоміжна енергія, необхідна для іонізації, набувається атомом в результаті зіткнення з іншою частинкою. Ступенева фотоіонізація потребує менших енергій квантів, і іонізуючі випромінювання може з'являтися в самому газовому розряді при переході збуджених атомів або іонів газу в незбуджений стан з випромінюванням квантів світла, достатніх для фотоіонізації.

### 6.3. Рекомбінація зарядів

Одночасно з процесом іонізації газу проходить видалення заряджених частинок з розряду. Обидва процесу врівноважуються і в стаціонарному стані концентрація заряджених частинок в розряді залишається незмінною. Усунення заряджених частинок з розряду пов'язане з одним з таких процесів:

- 1) рекомбінацією заряджених частинок протилежного знаку в об'ємі газу;
- 2) «прилипання» електронів до нейтральних атомів і молекул усунення швидких частинок;
- 3) дифузією заряджених частинок до стінок посудини з наступною рекомбінацією;
- 4) рекомбінацією зарядів на електродах.



При рекомбінації позитивних іонів з електронами або від'ємними іонами надлишкова енергія виділяється у вигляді рекомбінаційного випромінювання або передається найбільшим елементарним частинкам у процесі «потрійного зіткнення». У разі ступеневої рекомбінації утворюються збудження атома, які потім переходять з випромінюванням у нормальний стан. Швидкість в об'ємній рекомбінації пропорційна концентрації зарядів обох знаків:

$$\frac{dn_+}{dt} - \frac{dn_-}{dt} = -\beta n_+ n_-, \quad (6.18)$$

де  $\beta$  - коефіцієнт рекомбінації.

Коефіцієнт визначається швидкістю частинок. Чим повільніше рухаються частинки, тим більше часу вони знаходяться поблизу одна від одної і тим вище ймовірність рекомбінації. Коефіцієнт  $\beta$  може бути визначений за швидкістю зменшення концентрації заряджених частинок після виключення розряду. Якщо в момент включення розряду  $n_+ = n_- = 0$ , то інтегрування виразу (6.18) дає

$$n(+) = \frac{n_0}{1 + n_0 \beta t}. \quad (6.19)$$

Приєднання електронів до атомів мало ймовірне. Значно вища ймовірність приєднання електронів до молекул газу з наступною рекомбінацією з позитивними іонами. Приєднання електронів до нейтральних молекул газу («присипання») найбільш ймовірне в газах, молекули яких мають велике електронне споріднення. Зіткнення електрона з молекулою або позитивним молекулярним іоном може призвести до дисоціації, оскільки енергія електрона, що передається молекулі, викликає порушення міжатомних зв'язків.

В об'ємі газу електрон знаходиться поблизу іона дуже короткий проміжок часу (менше  $10^{-8}$  с), тому ймовірність об'ємної рекомбінації електрона і іона невелика. Посилена рекомбінація зарядів виникає на стінках трубки, до яких диффундують електрони і іони з об'єму газу і біля яких рух

зарядів просторово обмежений. Ймовірність рекомбінації біля стінок значна ще й тому, що стінка здатна поглинути енергію, яка виділяється при рекомбінації. Процес рекомбінації на металічних електродах полягає в переході вільних електронів із розрядного проміжку в метал під дією поля (біля границі кристалічних ґраток, а також переході електронів металу скрізь потенційний бар'єр біля його границі на один і вільних рівней наближаючогося позитивного іона з утворенням нейтрального атома газу в збудженому або нормальному стані.

Домінування того чи іншого виду рекомбінації в газовому розряді визначається перше за все тиском газу. При  $p < 10^2$  Па переважає поверхнева іонізація, при  $p > 10^3$  Па - об'ємна іонізація.

#### **6.4. Несамостійний розряд**

Електричні розряди діляться на несамостійні, які потребують для свого підтримання зовнішнього джерела, яке забезпечує появу заряджених частин (нагрівання катода, зовнішнє випромінювання і т.д.), і самостійні, які розвиваються з рахунок процесів у самому розряді і не потребують зовнішнього збудження.

Перехід від несамостійного розряду до самостійного легше прослідити в газорозрядній трубці з холодним катодом, на яку подана напруга і в якій електрони з'являються в розрядному проміжку за рахунок зовнішнього іонізуючого випромінювання, або за рахунок фотоелектронної емісії з катода.

Під дією прикладеної напруги заряджені частини починають рухатися до анода (електрони) і катода (позитивні іони), створюючи струм через розрядний проміжок. Вольт - амперна характеристика такого розряду наведена на рис. 6.3.

При малій анодній напрузі (ділянка 1) струм обмежений полем об'ємного заряду носіїв у розрядному проміжку, а також їхньою рекомбінацією, тому не всі утворені носії досягають електродів. Із

зростанням напруги до величин, що відповідають області 2, об'ємний заряд розпадається і майже всі носії попадають на електроди (режим насичення). З подальшим підвищенням напруги розряд переходить в режим газового підсилення, що характеризується утворенням електронних лавин (ділянка 3). Участок 4 відповідає переходу до самостійного розряду.

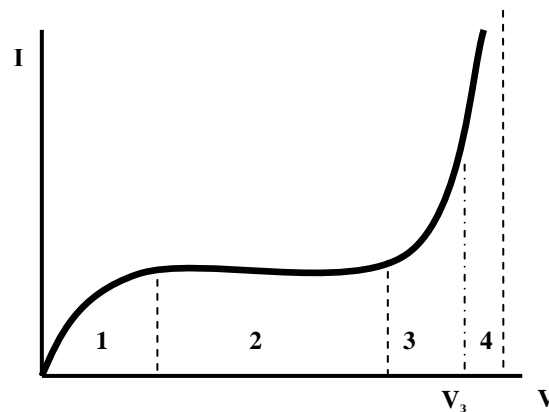


Рис. 6.3.

При цих напругах кінетична енергія, набута електронами на шляху до анода, достатня для іонізації атомів газу. Кожний акт іонізації служить джерелом появи нового вільного електрона в розрядному проміжку, причому цей електрон, прискорюючись полем, в свою чергу, здатен викликати іонізацію газу. Тому в мірі руху до анода число вільних електронів у розрядному проміжку лавинно зростає. Таунсендом були введені три коефіцієнти для опису процесу зростання електронних лавин:

1)  $\alpha$  – коефіцієнт об'ємної іонізації електронами, який дорівнює кількості актів іонізації, що робить один електрон на одиницю шляху до анода;

2)  $\beta$  – коефіцієнт об'ємної іонізації позитивним іонами, який дорівнює кількості актів іонізації, що робить один позитивний іон на одиницю шляху до катода;

3)  $\gamma$  – коефіцієнт, що характеризує кількість електронів, які вилетіли із катода в результаті попадання на нього позитивних іонів, збуджених метастабільних атомів або молекул, а також квантів, випромінюваних

збудженими атомами газу, віднесених до числа бомбардуючих катод позитивних іонів (величина порядку  $10^{-3} \div 10^{-1}$ );

Перераховані явища на поверхні катода були названі  $\gamma$  – процесами.

Якщо вісь  $x$  направлена вздовж розрядного проміжка від катода до анода, то збільшення потоку електронів на шляху  $dx$  за рахунок іонізації атомів газу дорівнює

$$dn = \alpha n dx, \quad (6.20)$$

де  $n$  – кількість електронів, що проходять в одиницю часу через переріз, розташований на відстані  $x$  від катода.

Припустимо, що під дією зовнішнього збуджуючого фактора з анода виходять в одиницю часу  $n_0$  електронів. Для обчислення кількості електронів, які прийдуть на анод в першій електронній лавині  $n_{e_1}$  нетреба проінтегрувати вираз (6.1) в межах довжини розрядного проміжку, тобто від  $x=0$  до  $x=d$ , де  $d$  – відстань між катодом і анодом. У загальному вигляді коефіцієнт  $\alpha$  є функцією напруженості поля і тиску, тому інтегрування виразу (6.20) приводить до співвідношення

$$n_{e_1} = n_0 e^{\int_0^d \alpha dx}. \quad (6.21)$$

Для плоскої системи електродів при відсутності об'ємного заряду (при малих густинах струму несамоіонізованого розряду ним можна знехтувати) поле між електродами однорідне, коефіцієнт  $\alpha$  не залежить від  $x$  і вираз (6.21) зводиться до

$$n_{e_1} = n_0 e^{\alpha d}. \quad (6.22)$$

На шляху до анода електрони виконують  $n_{e_1} - n_0$  актів іонізації, під дією прикладеної напруги до катода направиться потік іонів, рівний

$$n_{e_1} - n_0 = n_0 (e^{\alpha d} - 1). \quad (6.23)$$

Дійшовши до катоду, позитивні іони виключать появу допоміжної кількості електронів за рахунок  $\gamma$ -процесів, що складаються з числом електронів, що дають початок другій лавині з області катода:

$$n_0 + \gamma(n_{e_1} - n_0) = n_0[1 + \gamma(e^{\alpha d} - 1)]. \quad (6.24)$$

До кінця другої лавини воно зросте до

$$n_{e_2} = n_0[1 + \gamma(e^{\alpha d} - 1)]e^{\alpha d}, \quad (6.25)$$

а в розряді з'явиться

$$n_0[1 + \gamma(e^{\alpha d} - 1)](e^{\alpha d} - 1) \quad (6.26)$$

позитивних іонів, які, пройшовши на катод, викличуть подальше збільшення електронного струму.

Відношення кількості електронів, які вилітають в s-й лаві в результаті  $\gamma$ -процесів, до числа електронів, які покинули катод у попередній лаві, називають іонізаційним зростанням і позначають  $\mu$ . Очевидно, іонізаційне зростання

$$\mu = \gamma(e^{\alpha d} - 1) \quad (6.27)$$

визначає ступінь зростання електронних лавин. при  $\mu < 1$  кожна наступна лавина менше попередньої і розряд затухає, при  $\mu = 1$  всі електронні лавини однакові, а при  $\mu > 1$  лави зростають. При викривленні поля в розрядному проміжку об'ємним зарядом

$$\mu = \gamma(e^{\int_0^d \alpha dx} - 1). \quad (6.28)$$

У s-й лавині кількість електронів, які прийшли на анод,

$$n_{os} = n_0 e^{\alpha d} \sum_{r=0}^{S-1} [\gamma(e^{\alpha d} - 1)]^r. \quad (6.29)$$

Підсумовуючи вираз (6.29) і направивши S до нескінченності, можна визначити число електронів, які проходять до анода в усталеному режимі:

$$n_e = n_0 \frac{e^{\alpha d}}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)}. \quad (6.30)$$

Тоді анодний струм

$$I = I_0 \frac{e^{\alpha d}}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)}. \quad (6.31)$$

Анодний струм являє собою електронну складову струму в кінці розрядного проміжку.

### 6.5. Перехід несамостійного розряду в самостійний

Коефіцієнти  $\alpha$  і  $\gamma$  залежать від напруженості електричного поля і тиску газу. В загальному вигляді ці залежності описуються деякими функціями  $f_1$  і  $f_2$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= pf_1(\varepsilon / p), \\ \gamma &= f_2(\varepsilon / p). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Графік  $\alpha / p = f_1(\varepsilon / p)$  для повітря наведено на рис. 6.4. Вибір системи координат обумовлений тим, що  $\alpha / p$  і  $\varepsilon / p$  є інваріантами подібного перетворення.

$\alpha / p$

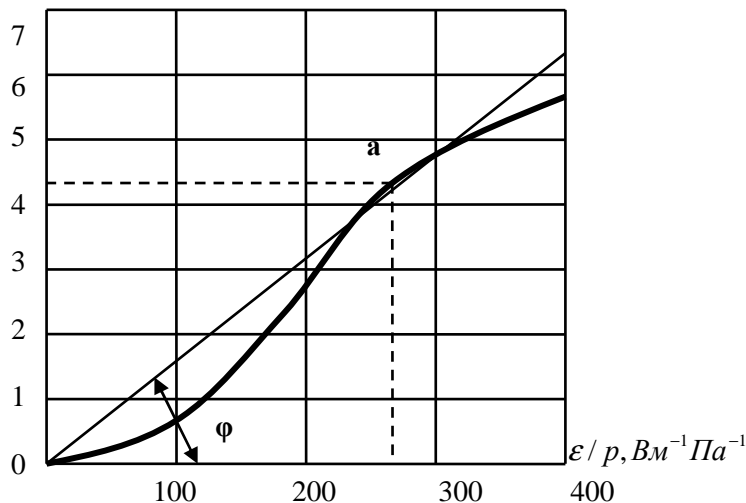


Рис.6.4.

Таблиця 6.1.

Газ	$\varepsilon / p$ , $\text{Вм}^{-1}\text{Па}^{-1}$	$1/\eta$ , В
N <sub>2</sub>	262	75
CO <sub>2</sub>	300	62
Повітря	274	66
Hg	150	80

Для розрахунку відношення  $\alpha / p$  можна скористатися напівемпіричною формулою  $\varepsilon / p, \text{Вм}^{-1}\text{Па}^{-1}$

$$\alpha / p = A \exp\left(-B \frac{p}{\varepsilon}\right) \quad (6.33)$$

де коефіцієнти  $A$  і  $B$  визначаються дослідним шляхом. Для повітря  $A=11,3 \text{ м}^1\text{Па}^{-1}$ ,  $B = 2741 \text{ Вм}^{-1}\text{Па}^{-1}$ .

Результати вимірювань показують наявність максимуму на графіку  $\alpha / p = f_1(\varepsilon / p)$ , розташованому для більшості газів в області  $10^3 \div 10^4 \text{ Вм}^{-1}\text{Па}^1$ . В сильному електричному полі і при малих тисках газу електрон набирає між зіткненнями таку велику енергію, яка відповідає малій вірогідності іонізації (далеко за максимум перерізу іонізації), що і викликає зменшення  $\alpha$ .

Для характеристики інтенсивності іонізації часто користуються коефіцієнтом  $\eta = \alpha / \varepsilon = \frac{\alpha / p}{\varepsilon / p}$ , що визначає середнє число іонів, утворених електроном на пройдений ним різниці потенціалів в 1В. Обернена величина  $1/\eta$  характеризує середню енергію у вольтах, витрачену електроном на один акт іонізації.

З виразу (6.32) випливає, що перший коефіцієнт Таунсенда  $\alpha$  досягає максимуму при певних значеннях  $\varepsilon / p$ . Дійсно, максимум функції  $\alpha = pf_1(\varepsilon / p)$  можна знайти, прирівнявши нулю похідну:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p} = p \frac{\partial f_1(\varepsilon / p)}{\partial(\varepsilon / p)} \cdot \frac{\partial(\varepsilon / p)}{\partial p} + f_1(\varepsilon / p) = 0. \quad (6.34)$$

Підставивши  $f_1(\varepsilon / p) = \frac{\alpha}{p}$  і  $\frac{\partial(\varepsilon / p)}{\partial p} = -\frac{\varepsilon}{p^2}$ , одержимо, що  $\alpha$  досягає максимуму при

$$\eta = \frac{\alpha / p}{\varepsilon / p} = \frac{\partial(\alpha / p)}{\partial(\varepsilon / p)}, \quad (6.35)$$

тобто в тій точці графіка рис.6.4, де дотична до кривої  $f_1(\varepsilon / p)$  проходить через початок координат (точка  $a$ ). Величина  $(\varepsilon / p)$ , при якій  $\alpha$  досягає максимуму, називається сталюю Столетова. У табл. 6.1 наведені значення сталої Столетова для різних газів і відношення  $1/\eta$ , що відповідає максимуму  $\alpha$ .

З підвищенням напруги між електродами значення  $\alpha$  зростає і при деякій нарузі  $V$  величина  $\gamma(e^{\alpha d} - 1)$  стає рівною одиниці, тобто зніменник виразу (6.31) стає рівним нулю. Тепер вже анодний струм  $I$  не дорівнює нулю при зникненні зовнішнього збудження (при  $I_0=0$ ), іншими словами при виконанні умови

$$\mu = \gamma(e^{\alpha d} - 1) = 1 \quad (6.36)$$

розряд стає самостійним (виникає пробій газу). Виконання умови (6.17) фізично означає, що кожний електрон, що вилітає з катода, викликає у процесі лавинного зростання таку кількість актів іонізації, що позитивні іони, які прийшли на катод в свою чергу вибивають з нього один електрон, тобто розряд здатний підтримуватися тільки за рахунок внутрішніх процесів у розрядному проміжку. Напруга  $V_3$ , при якій виникає самостійний розряд, називається напругою запалювання (див. рис. 6.3). Якщо в момент включення напруга наперед перевищує  $V_3$ , при якій виникає самостійний розряд, то в розрядному проміжку протягом дуже короткого відрізка часу розвивається самостійний розряд, минуючи стадію несамостійного розряду. Умову (6.36) з урахуванням (6.32) можна записати у вигляді

$$f_2(\varepsilon / p) [e^{pdf_1(\varepsilon / p)} - 1] = 1. \quad (6.37)$$

Враховуючи, що безпосередньо перед запалюванням розряду струм був невеликим і об'ємний заряд не викривляє розподіл електричного поля, тобто  $\varepsilon = \varepsilon_3 = V_3 / d$ , умову виникнення самостійного розряду можна переписати у вигляді

$$f_2\left(\frac{V_3}{pd}\right) [e^{pdf_1(V_3 / pd)} - 1] = 1 \quad (6.38)$$

Звідси виходить, що напруга запалювання визначається добутком тиску газу на відстань між катодом і анодом. У цьому проявляється частковий випадок закону подібності газових розрядів. Величина  $V_3$  може бути



знайдена з виразу (6.9) після підстановки в нього співвідношень (6.35) і (6.36) і дворазового логарифмування

$$V_3 = \frac{B(pd)}{C + \ln(pd)}, \quad (6.39)$$

де  $C = \ln \frac{A}{\ln(1+1/\gamma)}$ . (6.40)

Графіки цієї залежності для різних газів, які називаються кривими Пашена, наведені на рис. 6.5. При певних значеннях  $pd$  напруга  $V_3$  мінімальна. Очевидно, це відповідає умові оптимальної іонізації, тобто точці а на рис. 6.5. Умову мінімуму можна одержати з виразу (6.39), прирівнявши похідну  $\frac{dV_3}{d(pd)}$ , тоді

$$(pd)_{\min} = \frac{e}{A} \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \quad (6.41)$$

$$V_{3\min} = B(pd).$$

Тут  $e$  – основа натурального логарифму.

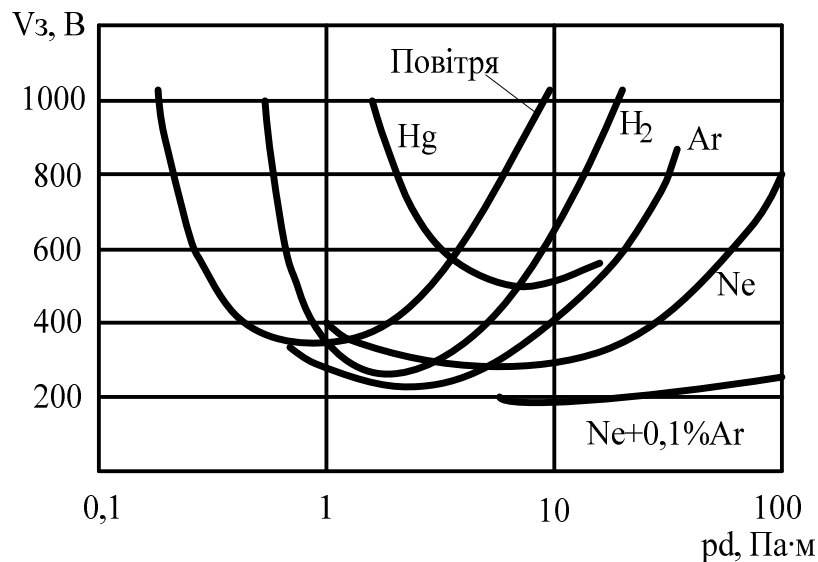


Рис. 6.5.

Необхідність підвищення напруги для запалювання розряду при зменшенні  $pd$  відносно  $(pd)_{\min}$  викликана тим, що електронні лавини не встигають розвинути в необхідній мірі при малих міжелектродних

відстанях і в умовах малої густини газу. При великих значеннях  $pd > (pd)_{\min}$  збільшення напруги поля пов'язано, по-перше, із зменшенням напруженості поля при великих міжелектродних відстанях і по-друге із зменшенням довжини вільного пробігу електронів в умовах високого тиску (а значить густини) газу. Тепер тільки невеличка частина електронів встигає набрати між зіткненнями з атомами енергію, достатню для іонізації.

Напруга  $V_z$  залежить також від матеріалу катоду, наявності домішок в газовому середовищі, форми розрядного проміжку. Чим менше робота виходу матеріалу катода, тим нижче напруга запалення. Залежно від типу домішок в газовому середовищі напруга  $V_z$  може або зменшуватися або зростати. Зокрема, добавка невеликої кількості іншого газу з малою енергією, іонізації атомів, меншої енергії збудження метостабільних станів в атомах основного газу є  $V_{\text{мет}}$  може привести до зменшення напруги запалювання.

Справа в тому, що в результаті бомбардування електронами з енергією, меншою енергії іонізації атомів основного газу є  $V_i$ , але більшої енергії збудження метостабільних атомів є  $V_{\text{мет}}$ , утворюється значна кількість метастабільних атомів (але не іонів) основного газу, які потім здатні іонізувати атоми домішок у процесі не пружних зіткнень. Цей процес потребує витрати енергії електрона, меншої енергії іонізації атома основного газу. При цьому концентрація атомів домішок може бути незначною, бо енергія електронів передається їм не в результаті безпосередніх зіткнень, а через метастабільні атоми основного газу, концентрація яких на декілька порядків вище. Подібні суміші газів називаються пенінгівськими. До них відносяться, зокрема, суміш, що складається з неону з невеликою (порядку 0,1%) добавки аргона. На рис. 6.4 наведені криві Пашена для Ne і Ar і суміші Ne+0,1%Ar.

Область застосування закону Пашена (6.39) обмежена колом фізичних явищ, для яких справедливий закон подібності розрядів. Відхилення від закону Пашена спостерігається при великих тисках, коли виникає іскровий

пробій розрядного проміжку і при малих енергіях (pd), коли між електронами виникає вакуумний пробій з участю автоелектронної емісії.

Умова (6.36) вказує лише на виникнення самостійного розряду в газі, але не дає свідчень про його подальший розвиток і накопичення об'ємного заряду в розрядному проміжку. Для того, щоб врахувати вплив об'ємного заряду на розвиток розряду, В. Роговський дослідив рівняння Таунсенда сумісно з рівнянням Пуассона. Одержана ним картина зростання розряду може бути якісно описана наступним чином. З моменту запалення самостійного розряду струм швидко зростає і різко збільшується концентрація позитивних іонів в розрядному проміжку. Тепер вже напруженість поля не є постійною, а напруга не зростає лінійно від катода до анода, як це було перед моментом запалювання (пряма 1 на рис. 6.6,а). Найбільш висока концентрація електронів і позитивних іонів поблизу анода, де сильніш за все розвинені електронні лавини і максимальна кількість актив іонізації. Провідність цієї ділянки високоіонізованого газу (плазми) велика і падіння напруги на ньому незначне. Тому розподіл потенціалу  $V$  буде послідовно, в міру розвитку розряду і збільшення області плазми відповідати кривим 2 і 3 на рис. 6.6,а.

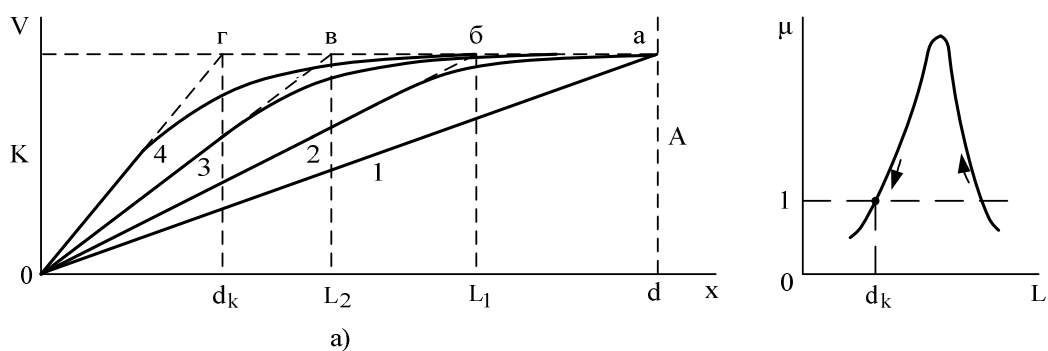


Рис.6.6.

Криві зростання потенціалу можуть бути наближено замінені ломаними (штрихові лінії), так що напруженість електричного поля відмінна від нуля лише в межах обмеженої ділянки до точок б, в і т.д. Відстань  $L$ , на якій проходить зростання напруги, поступово зменшується ( $L_2 < L_1 < d$ ), а

напруженість поля в прикатодній області зростає. Коефіцієнт  $\alpha$  залежить від напруженості електричного поля (див. рис. 6.4), тому він також змінюється від лавини до лавини в міру розвитку розряду і зменшення  $L$ . Якщо в початковий момент  $V=V_3$ ,  $L=d$  і  $\mu=\gamma(e^{\alpha d}-1)=1$ , то в міру зменшення довжини ділянки падіння напруги  $L$  в результаті накопичення об'ємного заряду значення  $\mu$  зростатиме, так як на початковому участку залежності  $\alpha/p = f(\varepsilon/p)$ , лівіше точки  $a$  на рис. 6.4 коефіцієнт  $\alpha$  зростає швидше ніж зменшується  $L$ , тобто  $\alpha L$  збільшується і  $\mu$  стає більше одиниці (рис. 6.6). У свою чергу,  $\mu > 1$  означає послідовне зростання електронних лавин і збільшення об'ємного заряду. Іншими словами, умова запалювання розряду  $\mu=1$  ще не означає, що він буде стійким. Збільшення струму в результаті випадкової флуктуації призводить до зменшення довжини ділянки падіння напруги і зростання  $\mu$ , після чого розряд зростає за описаною схемою.

Коли довжина ділянки падіння напруги зменшується настільки, що напруженість поля буде відповідати області правіше точки  $a$  на рис. 6.4, зростання електричних лавин  $\alpha/p = f(\varepsilon/p)$  уповільнюються. У цій області тангенс кута нахилу дотичної до кривої менше тангенса кута нахилу прямої  $Oa$ . Але оскільки вздовж прямої  $Oa$

$$\frac{\alpha}{p} = \frac{\varepsilon}{p} \operatorname{tg} \varphi = \frac{V_3}{pL} \operatorname{tg} \varphi \quad \text{і} \quad \alpha L = V_3 \operatorname{tg} \varphi = \text{const},$$

в області правіше точки  $a$  величина  $\alpha L$  зменшується із зростанням  $\varepsilon$  і зменшенням  $L$ .

Іонізаційне зростання  $\mu$  зменшується із зростанням струму (рис. 6.6,б) до тих пір, поки при деякій довжині участка падіння напруги  $L=d_k$  не стане рівним одиниці (але вже в області  $\varepsilon/p$  правіше точки  $a$ ). Ця відстань буде відповідати стійкій рівновазі і саме вона буде встановлюватися в розряді. Розряд остаточно стабілізується при такому розподілу потенціалу, при якому коефіцієнти  $\alpha$  і  $\gamma$  будуть зв'язані з відстанню  $d_k$  співвідношенням

$$\gamma(d_k) \left[ e^{\alpha(d_k)d_k} - 1 \right] = 1, \quad (6.42)$$

коли всі лавини стануть однаковими.

Проте якщо в міру збільшення напруженості поля із зменшенням  $L$  електронний струм зростатиме за рахунок розігріву катоду іонним бомбардуванням або в результаті автоелектронної емісії та стабілізації розряду не буде і розрядний струм продовжуватиме збільшуватись поки не буде обмежений параметрами зовнішнього ланцюга.

За імпульсною анодною напругою, більшою  $V_3$ , розряд виникає не одразу. Розвиток його починається через  $t_s$  (статистичний час запізнення) між моментом подачі напруги і моментом появи вільного електрона, здатного почати процес іонізації в газі. Час  $t_s$  пов'язаний з наявністю іонізуючих факторів, зокрема із залишковою іонізацією в газі, а також із станом поверхні електродів і величиною прикладеної напруги. Остаточне встановлення розряду характеризується часом розвитку лавини розряду (часом формування)  $t_f$  від початку першої лавини до встановлення стаціонарного розряду. Час  $t_f$  залежить від  $\varepsilon$  і  $p$  і зменшується від  $10^{-4}$ - $10^{-5}$ с. до  $10^{-7}$ - $10^{-8}$ с. при підвищенні тиску газу від  $10^2$  Па до 1 атм. ( $\sim 10^5$  Па)

## 6.6. Типи газових розрядів

Параметри зовнішнього ланцюга (напруга джерела і баластний опір) визначають, на якій стадії розвитку зупиниться газовий розряд. При зменшенні баластного опору розряд переходить від однієї форми до іншої, що відіб'ється на ході вольт-амперної характеристики.

Приблизний хід вольт-амперної характеристики електричного розряду наведено на рис. 6.7.

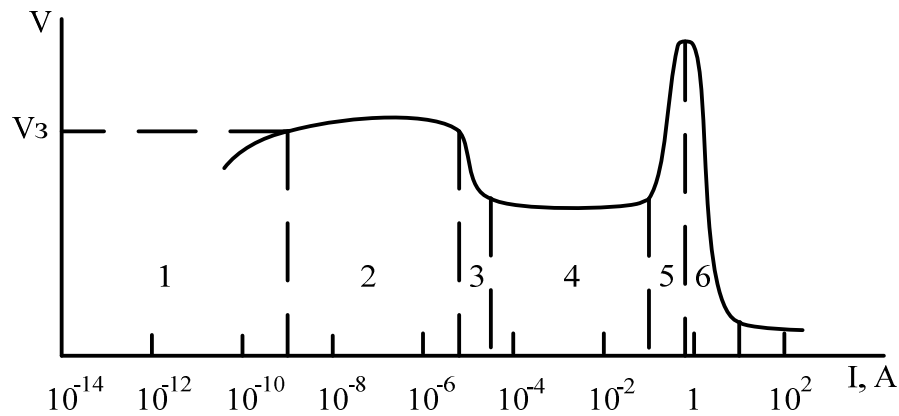


Рис 6.7.

Окремі частки характеризують різні типи газових розрядів:

- 1 - несамостійний темний розряд;
- 2 - самостійний темний розряд;
- 3 - нестійка область переходу від темного розряду до тліючого;
- 4 - нормальний тліючий розряд;
- 5 - аномальний тліючий розряд;
- 6 - перехідна область між тліючим і дуговим розрядами;
- 7 - дуговий розряд.

Особливими типами необхідно вважати коронний і іскровий розряди, які виникають переважно при високих тисках газу.

## 6.7. Тліючий розряд

Густина струму в самостійному темному (таундсендівському) розряді має порядок  $10^{-11}$ - $10^{-2}$  А/м<sup>2</sup>, тому об'ємний заряд в розрядному проміжку настільки малий, що не викривляє розподілу електричного поля.

При зменшенні баластного опору в зовнішньому ланцюгу розрядний струм, а з ним і об'ємний заряд зростають і при досягненні певного значення струму починається швидкий перехід до тліючого розряду з достить високою густиною об'ємного заряду і різко нерівномірним розподілом поля вздовж

розрядного проміжку. Одночасно напруга на розрядній трубці падає від декількох сотень або навіть тисяч вольт до 70-300 В.

Нормальному тліючому розряду відповідає ділянка 4 вольт-амперної характеристики, зображеної на рис. 6.7. Розряд виникає як правило, при тисках 1-100 Па. і характеризується доволі малим струмом ( $10^{-4}$ -1А) і порівняно великою напругою на розрядній трубці (сотні вольт). Як видно з рис. 6.6, майже всі падіння напруги сконцентровані на ділянці, яка називається ділянкою катодного падіння напруги.

Тліючий розряд існує і при атмосферному тиску, але для запобігання розігріву катода і переходу до дугового розряду катод розрядної трубки повинен мати охолодження.

У тліючому розряді можна виділити декілька областей з різнопротікаючими процесами збудження, іонізації і рекомбінації зарядів. У довгих трубках в умовах низького тиску ці області можна спостерігати безпосередньо за різною інтенсивністю свічення газів.

На рис. 6.8 позначені області тліючого розряду і наведена картина свічення (а), а також розподіл інтенсивності свічення (б), потенціалу (в), напруженості поля (г) й густини заряду (д) між катодом К і анодом А.

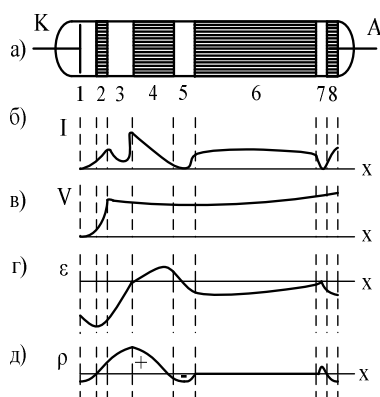


Рис. 6.8.

Фізику явищ, які проходять в різних областях, можна якісно описати наступним чином (номера областей відповідають номерам на рис.6.8):

1. Тонка область, що прилягає до катода, називається першим катодним, або основним темним простором. Електрони, вибиті потоком іонів з катода, мають малі швидкості й беруть участь тільки в пружних зіткненнях з атомами

газу, так що в цій області атоми знаходяться в незбудженому стані і свічення відсутнє.

2. Прискорюючись в сильному електричному полі, електрони набирають енергію, достатню для збудження атомів газу, які потім переходять знову в незбуджений стан з випроміненням, утворюючи ділянку першого катодного свічення. Чим ближче до анода відбулося зіткнення електрона, чим більшу він мав енергію і тим сильніше збудження ним атома. Тому енергія квантів, випромінюваних збудженими атомами і частота випромінюваних збільшується в тій частині ділянок першого катодного свічення, яка розташована ближче до анода.

3. Коли електрони набирають енергію, достатню для іонізації атомів газу, інтенсивність свічення зменшується, утворюючи другий катодний темний простір. Звідси починаються електронні лавини. Тут мало збуджених атомів, оскільки мала ймовірність збудження при малих енергіях електронів. Рекомбінація електронів і іонів також малоймовірна через їх велику швидкість. Рухливість електронів значно вище рухливості позитивних іонів, тому в області другого катодного темного простору переважає позитивний заряд лавин, що повільно рухаються.

4. Електронні лавини, які розвиваються, створюють високу ступінь іонізації газу, тому провідність решти ділянок розряду значно вище, ніж в області катодного падіння напруги і зміна потенціалу в них невелика, так що заряди рухаються майже не прискорюючись полем. Їх направлений рух швидко замінюється хаотичним, енергія зменшується і її вже недостатньо для іонізації атомів. При цьому верогідність збудження атомів вторинними електронами, які з'явилися в результаті іонізації, і первинними електронами, які зберегли частину енергії після акту іонізації, знову збільшується і свічення зростає. Свічення зумовлене не тільки висвічуванням збуджених атомів, але й рекомбінацією повільнорухомих електронів і позитивних іонів (це свічення називається тліючим). У міру віддалення від катоду швидкість електронів поступово знижується, що зменшує ймовірність збудження і інтенсивність свічення. Праву границю тліючого свічення можна вважати межею, до якої долітають швидкі електрони, що розігналися на дільниці



другого катодного темного простору. Різка границя тліючого свічення зі сторони катода являє собою межу, до якої диффундують повільні електрони в напрямку катода. Біля границі тліючого свічення вони зупиняються сильним електричним полем другого катодного темного простору. Накопичення повільних електронів приводить до компенсації позитивного заряду іонів (рис. 6.8) і деякого зниження потенціалу.

5. У результаті непружних зіткнень енергія електронів зменшується настільки, що вони стають здатними виконати лише пружні зіткнення; свічення знову падає (фарадеївський темний простір).

6. Найбільший об'єм в розрядному проміжку зайнятий стовпом розряду – ділянок високоіонізованим газу (плазми) з приблизно рівною концентрацією позитивних і від'ємних зарядів. Диффузія носіїв заряду на стінки в області темного простору і остов розряду викликає зменшення їх концентрації в об'ємі й зниження провідності. Тому вздовж всього стовпа розряду потенціал дещо підвищується і електронний газ розігрівається в електричному полі до температури, за якої енергія електронів стає достатньою для іонізації газів в тій мірі, що поповнити втрати зарядів на стінки. Чим більше діаметр розрядної трубки, тим менша дифузія зарядів до стінок і градієнт потенціала вздовж стовпа розряду, а значить, температура електронного газу. Відповідно зменшується інтенсивність свічення газорозрядної плазми, збуджуваної електронними ударами (більш докладно процеси в стовпі розряду наведені нижче).

7,8 Якщо в стовпі розряду концентрація позитивних і від'ємних зарядів приблизно однакова, то біля анода ця рівність порушується за рахунок руху позитивних іонів до катода, а електронів – до анода. У результаті зростає напруженість електричного поля між стовпом розряду і анодом і з'являється анодне падіння напруги, необхідне для забезпечення постійності повного струму на цій ділянці розряда. Знак анодного падіння напруженості залежить від розмірів анода. Струм на анод визначається кількістю електронів, диффундуючих із остова розряду; при малих розмірах

анода він може бути менше струму електронів, які відходять від анода в зовнішній ланцюг. У цьому випадку потенціал анода підвищується настільки, щоб збільшився відбір електронів з остова і число витягнутих до анода із плазми електронів дорівнювало числу електронів, відбираних від анода у зовнішній ланцюг (позитивне анодне падіння напруги). При великих розмірах анода струм електронів, які приходять на анод з розряду, перевищує струм у зовнішньому ланцюгу і для уникнення цієї нерівності потенціал анода автоматично знижується (від'ємне анодне падіння напруги). Знак анодного падіння напруги в значній мірі залежить також від форми поверхні анода і ступеня компенсації від'ємного об'ємного заряду електронів позитивними іонами поблизу анода.

При позитивному анодному падінні напруги електрони на шляху до анода прискорюються і набувають енергію, достатню для збудження і навіть іонізації газу. Тому біля анода з'являється ділянка анодного свічення (8), відділена від стовпа розряду темним анодним простором (7).

Для підтримування тліючого розряду необхідні лише його катодні ділянки (1-4), які забезпечують іонізацію газу. Стовп розряду являє собою ділянка з підвищеною провідністю, з'єднуючою катодні ділянки розряду з анодом. У катодних ділянках розряду направлений рух електронів переважає над хаотичним, тому при повороті катода відносно анода катодні ділянки розряду не змінюють свого положення відносно катода, а решта розряду заповнюється стовпом довільної форми, в якому рух зарядів має в основному дифузійний характер. При скороченні відстані між анодом і катодом протяжність стовпа зменшується і він може зовсім зникнути. У міру наближення анода до катода вслід за стовпом зникає фарадеївський темний простір і катодне тліюче свічення. При підході анода до границі тліючого свічення, розташованої ближче до катода, тобто при введенні його в область, де формуються електронні лавини (область 3 на рис. 6.8), розряд зникає, а для його підтримування необхідно підвищити ефективність процесів іонізації збільшенням напруги на трубці (важкий розряд).

При переході від темного до тліючого розряду, розмір області в якій проходить зростання напруги, різко скорочується за рахунок розвитку об'ємного заряду, напруженість поля в ній зростає. У результаті полегшується умова утворення електронних лавин на катодних ділянках розряду і він може підтримуватися при напругах менших напруг запалювання. Напруга, при якій існує розряд, близька до падіння напруги на катодній ділянці розряду (нормальному катодному падінню напруги  $V_{KH}$ ) і відрізняється від нього на величину анодного падіння і падіння напруги на стовпі розряду.

Нормальне катодне падіння в тліючому розряді не залежить від струму і визначається типом газу. Приблизно можна вважати, що

$$V_{KH} = \eta \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right), \quad (6.43)$$

де  $\eta = \alpha/\varepsilon$ .

Як показують результати експериментів, в одному і тому ж при різних катодах виконується рівність

$$V_{KH} = Ke\varphi, \quad (6.44)$$

де  $K$  – коефіцієнт пропорційності, визначений типом газу,  $e\varphi$  – робота виходу з катода. У режимі нормального тліючого розряду густина струму  $j_n$  також постійна, а струм  $I$  визначається площею частини катода, зайнятою розрядом. При невеликих струмах розряд займає лише частину поверхні катода. Із зростанням струму - площа, зайнята розрядом, збільшується поки не стане рівною площі поверхні катода.

Природа сил, яка визиває це явище, поки незрозуміла. Як слідує із закону подібності розрядів, густина струму в нормальному тліючому розряді пропорційна квадрату тиску газу, оскільки відношення  $j_n/p^2$  є інваріантом подібного перетворення.

## 6.8. Самостійний дуговий розряд

При зменшенні баластного опору у зовнішньому ланцюзі розрядної трубки анодний струм зростає, а  $d_k$  зменшується настільки, що енергія і кількість іонів, бомбардуючих катод, стає достатньою для помітного підвищення його температури. З деякої точки поверхні катода, нагрітій значно більше інших точок, з'являється термоелектронна емісія, яка дає початок новим електронним лавинам і відповідно викликає підсилення потоку іонів, бомбардуючого катод.

Збільшення струму розряду приводить до підвищення напруги на баластному опорі і зниженню напруги на трубці, в результаті умови утворення лавин погіршуються і розряд може підтримуватись лише з більш нагрітої ділянки катода. Розряд буде обмежений за перерізом саме цією областю (катодною плямою) з дуже високою густиною струму – до  $10^{11}$  А/м<sup>2</sup>. Тепер причина вильоту електронів з катода на відміну від тліючого розряду криється не в  $\gamma$ -процесах, а в термоелектронній емісії. Розрядний струм різко зростає, а розряд перетворюється в самостійний дуговий розряд.

Термоелектронна емісія є однією з можливих причин виникнення дугового розряду. Теорія катодної плями до кінця не розроблена, а щодо механізму емісії з катода існують різні погляди. Найбільш ймовірним механізмом виривання електронів з катода є термоавтоелектронна емісія – поєднання термічного збудження електронів тіла з сильним електричним полем в катодній області розряду, змінюючим форму потенціального бар'єру у поверхні катода. У певних умовах термоавтоелектронна емісія поступається місцем термоелектронній емісії (за високих тисків газу і тугоплавких катодах) або автоелектронній емісії (за наявністю діелектричних плівок на поверхні катода, а також при сильно випаровуючих катодах).

На відміну від тліючого розряду протяжність ділянки катодного падіння напруги обмежена середньою довжиною вільного пробігу електрона, а

катодне падіння приблизно дорівнює потенціалу іонізації атомів газу  $V_i$  (рис.6.9).

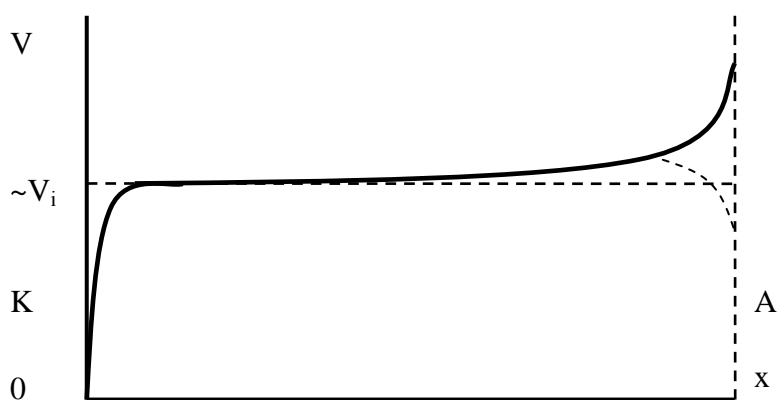


Рис 6.9.

При високій густині струму цієї різниці потенціалів достатньо для того, щоб електрони, які вилетіли з катоду, встигли набрати енергію, достатню для іонізації атомів газу. Протяжність ділянки катодного падіння напруги настільки мала ( $10^{-8}$ - $10^{-6}$  м), що навіть за невеликого катодного падіння напруженість поля досягає величин, здатних викликати автоелектронну емісію.

На ділянці катодного падіння напруги електрони практично не зіткаються з атомами газу і рухаються за тими ж законами, що і в електровакуумному діоді.

За межами ділянки катодного падіння розташовується стовп дугового розряду, який відрізняється від стовпа тліючого розряду більш високою густиною струму.

Повне падіння напруги на розряді складається з катодного падіння, різниці потенціалів на стовпі розряду і анодного падіння. Анодне падіння напруги, як і тліючому розряду, може бути позитивним і від'ємним в залежності від розмірів і форми анода.

## 6.9. Несамостійний дуговий розряд

В іонних приладах з розжаренням за рахунок зовнішнього джерела термоемісійним катодом виникає несамостійний дуговий розряд. Процеси іонізації і розподілу потенціалу в розрядному проміжку подібні до аналогічних процесів у самостійному дуговому розряді. На рис. 6.10 зображена вольт-амперна характеристика несамостійного дугового розряду.

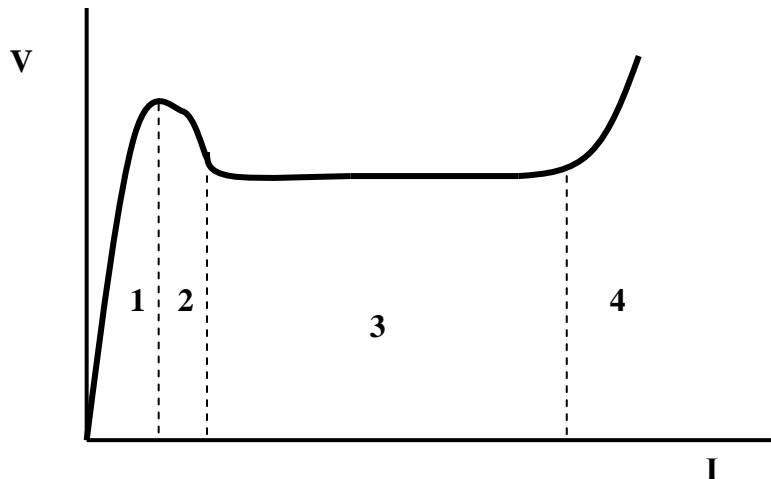


Рис. 6.10.

При низьких анодних напругах (менше  $V_i$ ) між катодом і анодом протікає лише електронний струм, аналогічний струму в електровакуумному діоді (з поправкою на пружні зіткнення електронів з атомами газу) – ділянка 1. При підвищенні анодної напруги до величини порядку потенціалу іонізації атомів газу  $V_i$  починається утворення плазмового стовпа, як і в самостійному розряді, і розподіл потенціалу стає близьким до зображеного на рис. 6.9. Після запалювання несамостійного дугового розряду напруга на розрядній трубці дещо знижується в порівнянні з  $V_i$  (ділянка 2). Можливість протікання розряду при  $V < V_i$  пов'язана з підвищенням ймовірності ступінчастої іонізації в газі при достатньо великій густині струму.

Електронна складова струму, що декілька порядків перевищує іонну складову, обмежена від'ємним об'ємним зарядом електронів біля катода. Зростання струму на ділянці 3 вольт-амперної характеристики пов'язане з поступовою нейтралізацією поля об'ємного заряду полем позитивних іонів,

зростаючим у міру збільшення струму і пов'язаним з ним підсиленням процесу іонізації. Від'ємний об'ємний заряд електронів створює мінімум потенціала поблизу катода, затримуючи електрони. Із зростанням струму величина мінімуму зменшується, що забезпечує керування електронним струмом без необхідності зміни анодної напруги, яка внаслідок цього залишається постійною. Коли ж мінімум потенціалу біля катода зникає під дією поля позитивних іонів, електронний струм з катода стає рівним струму емісії і подальше збільшення струму неможливе без збільшення анодної напруги для підсилення  $\gamma$ -процесів і процесів іонізації (ділянка 4). При значному підсиленні струму розряду можливий перехід до самостійного дугового розряду з появою падаючої ділянки на вольт-амперній характеристиці.

Дуговий розряд у трубці з розжареним катодом може існувати і при дуже низьких анодних напругах, нижче потенціалу збудження атомів газу. Можливість іонізації газу в таких умовах визначається тим, що за рахунок об'ємного заряду позитивних іонів поблизу катода утворюється максимум потенціала, близький до потенціалу збудження, чим забезпечується можливість ступінчастої іонізації.

## **6.10. Плазма газового розряду**

*Основні поняття.* Під плазмою розуміють такий стан газу, що характеризується помітним ступенем іонізації і квазінейтральністю.

Ступінь іонізації  $\propto$  дорівнює відношенню кількості іонізованих атомів або молекул до загального числа важких частинок в об'ємі і в значній мірі визначається температурою газу  $T_r$  і тиском  $P$ . При малому ступені іонізації говорять про слабоіонізовану або низькотемпературну плазму, в якій середня енергія частинок на багато менше енергії іонізації атомів. Другим крайнім випадком є високотемпературна, або гаряча плазма зі ступенем іонізації близьким до одиниці, що складається тільки із іонів і електронів.

Плазма газового розряду відноситься до низькотемпературної плазми. Температура її звичайно не перевищує  $10^4$ - $10^5$  К, а концентрація заряджених частинок - не більше  $10^{21}\text{м}^{-3}$ . Як правило, така плазма слабо іонізована. Тільки в сильнострумних розрядах, які утворюються при електричному вибуху металевих проводів, температура плазми зростає до  $10^5$  К при практично повній іонізації.

Подальший наш розгляд стосується лише низькотемпературної плазми.

Квазінейтральність означає приблизну рівність концентрації зарядів протилежного знака, тобто плазму можна вважати в середньому в достатньо великих об'ємах, електрично нейтральною. Слід відмітити, що не всяка кількість протилежно заряджених частинок утворює квазінейтральну плазму. Про плазму можна говорити тільки в тому випадку, якщо випадкове локальне збільшення концентрації зарядів одного знака створює електричне поле, яке приводить до перерозподілу заряджених частинок у просторі і вирівнюванню концентрації зарядів протилежного знака. За малих концентраціях заряджених частинок їх взаємний вплив незначний і можна вважати, що вони рухаються незалежно один від одного. Таким чином, плазма не може бути створена малим числом заряджених частинок. Тільки за достатньою концентрацією іонів і електронів, забезпечуючих появу сильних електричних полів при порушенні рівноваги зарядів, іонізований газ можна вважати плазмою.

Розрахунок показує, що критерієм наявності квазінейтральної плазми, а не системи окремих, практично не взаємодіючих частинок є така концентрація заряджених частинок, при якій розмір області, зайнятий газом, набагато більше деякого, що залежить від концентрації зарядів характерного розміру  $r_d$  - дебаївського радіуса. У середині області з розмірами порядку  $r_d$  напруженість електричного поля дуже мала, щоб привести до вирівнювання концентрації зарядів протилежного знака, і тут на відміну від всього об'єму квазінейтральність не додержується.



Дебаївський радіус є дуже важливим параметром плазми. Його фізичний сенс можна зрозуміти, розглядаючи розподіл потенціалу  $V$  деякого заряду  $e_j$ , внесеного в плазму. Рішення рівняння Пуассона приводить до наступного виразу для  $V(r)$ :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_j}{r} \exp(-r/r_D). \quad (6.45)$$

де  $r$  – відстань від заряду.

Із (6.45) видно, що потенціал у плазмі на відміну від потенціалу у вакуумі, пропорційного  $1/r$ , експоненційно спадає з відстанню і на відстані порядку  $r_D$  дія поля заряду, внесеного в плазму, на інші заряди компенсується за рахунок перерозподілу заряджених частинок у плазмі. Таким чином,  $r_D$  визначає відстань, на якій кулонівське поле будь-якого заряду плазми екранується оточуючими його зарядами протилежного знака. На таку ж відстань проникає в плазму зовнішнє електростатичне поле, напруженість якого спадає за рахунок екранування плазмою за законом  $\epsilon(x) = \epsilon_0 \exp(-x/r_D)$ , де  $\epsilon_0$  – напруженість поля біля границі плазми;  $x$  – відстань від границі в глибину плазми.

Дебаївський радіус, знайдений з вирішення рівняння Пуассона,

$$r_D = \left( \sum_j \frac{e_j^2 n_j}{\epsilon_0 k T_j} \right)^{-1/2}. \quad (6.46)$$

Тут  $n_j$  і  $T_j$  – концентрація і температура частинок сорту  $j$  з зарядом  $e_j$ ,  $k$  – стала Больцмана.

Інколи дебаївський радіус подають у вигляді  $r_D = \left( r_{De}^{-2} + r_{Di}^{-2} \right)^{-1/2}$ , де  $r_{De} = \left( \frac{\epsilon_0 k T_e}{e^2 n_e} \right)^{1/2}$  і  $r_{Di} = \left( \frac{\epsilon_0 k T_i}{z^2 e^2 n_i} \right)^{1/2}$  – дебаївські радіуси електрона і іона ( $z$  – зарядове число іона). В окремому випадку плазма, що складається з електронів і однозарядних іонів,  $T_e = T_i = T$ , і  $n_e = n_i = n$ , м<sup>-2</sup> із (6.46) одержимо

$$r_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{2e^2 n}} \approx 49 \sqrt{\frac{T}{n}}. \quad (6.47)$$

Якщо лінійний розмір об'єму, зайнятого газом, дорівнює  $L$ , то мінімальна концентрація зарядів одного знаку, за яким виконується умова квазінейтральності плазми (при  $L=r_D$ ),

$$n_{\min} \approx 2,4 * 10^3 T / L^2. \quad (6.48)$$

Якщо  $L=10^{-2}$ м,  $T=10^4$ К, то  $n_{\min} \approx 2,4 * 10^{11}$  м<sup>-3</sup>,

якщо  $L=10^{-1}$ м,  $T=10^4$ К, то  $n_{\min} \approx 2,4 * 10^{-9}$  м<sup>-3</sup>.

У газорозрядній плазмі радіус  $r_D$ , як правило, не перевищує  $10^{-4}$ м, тому що умова  $L \gg r_D$  практично завжди виконується.

У загальному випадку плазму необхідно розглядати як суміш різних газів – електронного, іонного, фотонного, а також газу нейтральних атомів і молекул, причому для характеристики енергетичного знака кожного газу вводять газу вводять поняття електронної  $T_e$ , іонної  $T_i$ , фотонної  $T_\phi$  температур і температури газу  $T_r$ , незважаючи на те, що точний вид функції розподілу частинок за енергіями не завжди може бути визначений.

Якщо плазма знаходиться у стані термодинамічної рівноваги, то  $T_e = T_i = T_\phi = T_r = T$  і  $\text{grad } T = 0$ , тобто  $T(x, y, z) = \text{const}$ . При цьому плазма називається ізотермічною. У реальних умовах, коли плазма піддається дії оточуючого середовища, температура стає функцією координати, тобто якщо при цьому в кожній точці простору температури окремих компонент плазми рівні одна одній, говорять про майже ізотермічну (квазіізотермічну) плазму. У газовому розряді, проте, частіше доводиться зустрічатися з неізотермічною плазмою, в якій температури окремих компонент у кожній точці помітно відрізняються, головним чином за рахунок того, що енергія зовнішнього джерела передається одній з компонент, в першу чергу електронам, а ті не встигають у процесі зіткнень передати її іонам і атомам газу.

## 6.11. Випромінювання плазми

Аналіз показує, що значна частина потужності зовнішнього джерела живлення витрачається на випромінювання іонізованого газу у видимій інфрачервоній і ультрафіолетовій областях довжини хвиль. Результати вимірювань показують наявність як суцільного так і лінійчастого спектру, пов'язаного з різними механізмами випромінювання квантів. Перерахуємо найбільш важливі механізми випромінювання:

1. Спонтанне випромінювання збуджених атомів молекул, або іонів, які повертаються в нормальний незбуджений стан з випромінюванням квантів певної енергії і частоти, відповідаючої переходу електрона між двома енергетичними рівнями. Тому спектр випромінювання складається із окремих ліній, а при випромінюванні квантів молекулами – із серій ліній (смуг), бо на лінії, з'язані з міжрівневими переходами електронів, накладаються лінії, зумовлені квантовою зміною енергії коливань і обертового рухів атомів у молекулі.

Інтенсивність випромінювання залежить від хімічного складу газу і температури  $T_e$  і збільшується при появі в плазмі атомів важких елементів. Із зростанням  $T_e$  електрони в атомах можуть збуджуватися на все більш високі енергетичні рівні, тому спектр випромінювання зміщується в ультрафіолетову область.

2. Рекомбінаційне випромінювання викликає захопленням вільного електрона на один з енергетичних рівнів позитивного іона. Спектр випромінювання суцільний, проте якщо електрон захоплений на збуджений рівень, він може в подальшому перейти на основний рівень з випромінюванням, так що в спектрі рекомбінаційного випромінювання можливе накладання неперервного і лінійчатого спектрів. Інтенсивність випромінювання прямо пропорційна добутку концентрацій електронів і іонів і обернено пропорційна кореню з електронної температури, оскільки із

зменшенням відносної швидкості електронів і іонів збільшується ймовірність рекомбінації.

3. Гальмівне випромінювання вільних електронів викликано різкою зміною швидкості електрона в електричному полі іона або атома. Зміна енергії, яка переходить в енергію кванта, коливається від значної кінетичної енергії вільного електрона до нуля, тому спектр гальмівного випромінювання суцільний. Основна маса випромінюючих квантів має енергію порядку  $kT_e$ , що відповідає видимій і інфрачервоній областям спектру. Інтенсивність випромінювання при високому ступені іонізації газу пропорційна добутку концентрацій електронів і іонів, а також кореню з електронної температури.

4. Бетатронне випромінювання плазми, вміщеної в магнітне поле. Електрони в плазмі за наявності магнітного поля рухаються в площині, перпендикулярній до вектора  $\vec{H}$  по замкнутих траєкторіях, що відповідно до законів електродинаміки викликає випромінювання, пропорційне енергії електрона і квадрату напруженості поля. Спектр випромінювання лінійчастий і містить частоти, кратні ларморівській частоті  $\omega_L$ . Бетатронне випромінювання сильно поглинається плазмою і тільки невелика його частина виводиться зовні.

За спектральним складом випромінювання плазми ділять на резонансне й нерезонансне. До резонансного відносять випромінювання, зумовлені переходами електронів з низьких збуджених рівнів на основний, незбуджений рівень. Його частоти співпадають з частотами випромінювання, поглинуемого атомами в основному стані. Решта ліній спектру відносяться до нерезонансного випромінювання. При великих густинах струму і великому тиску більша частина потужності розряду витрачається на нерезонансне випромінювання, що й використовується при створенні потужних ртутних ламп надвисокого тиску.

Оптимальні умови для резонансного випромінювання з'являються при низьких тисках (понад 0,1-10 Па).

## 6.12. Іскровий розряд

Іскровий розряд виникає при тиску газу, близькому до атмосферного (або вище), і більших напругах між електродами. На рис. 6.12 показана залежність пробивної напруги електричного поля в повітрі при  $\approx 105$  Па від відстані між плоскими паралельними електродами.

У момент пробою спостерігаються яскраві розвітвлені іскрові канали, які починаються і закінчуються в різних місцях розрядного проміжку і не обов'язково досягають електродів.

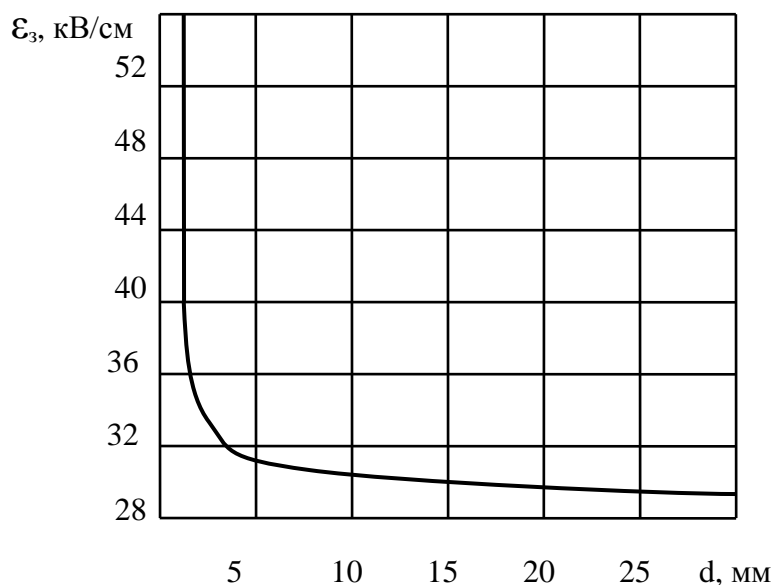


Рис. 6.11.

При тиску порядку атмосферного, коли добуток концентрації атомів газу і напруга запалювання іскрового розряду (пробивна напруга) практично не залежать від матеріалу катода, а час формування розряду на два порядки менше, ніж це виходить із теорії електронних лавин Таунсенда, яку тому не можна вважати придатною для пояснення процесів в іскровому розряді.

Теорія іскрового розряду будується на основі уявлень про одиничні лавини в розрядному проміжку, що приводять до утворення стримерів. Стример являє собою вузький і високопровідний канал з великим ступенем іонізації газу, що розповсюджується від катода до анода (від'ємний стример),

або від анода до катода (позитивний стример) зі швидкістю порядку  $10^5$ - $10^6$  м/с.

Картина розвитку іскрового розряду може бути спрощено описана наступним чином. При подачі високої напруги на електроди в області, що межує з катодом, з'являється електронна лавина, яка зростатиме в напрямку до анода. Крім процесів іонізації в лавині виникає збудження атомів газу, причому енергія збудження може перевищувати енергію іонізації, якщо збуджуються електрони внутрішніх оболонок, або вже іонізовані атоми. Збуджені атоми або іони переходять в незбуджений стан за час менше  $10^{-8}$  с, випромінюючи кванти, які здатні іонізувати атоми в об'ємі газу. Причиною фотоіонізуючого випромінювання може бути також випускання квантів при зіткненнях збуджених і незбуджених молекул. Таким чином в розрядному проміжку з'являються допоміжні лавини, викликана фотоіонізацією газу. Найбільше значення для процесу розвитку розряду мають ті з них, що виникли поблизу основної лавини, або між нею і анодом. Позитивний заряд, утворений іонами в каналі основної лавини, своїм полем, якщо воно перевищує поле лавини, втягує допоміжні лавини, збільшуючи потужність основної лавини, яка просувається до анода. У міру просування до анода голова основної лавини розширюється за рахунок втягування побічних лавин, а також внаслідок дифузійного руху зарядів.

Таким є механізм розвитку від'ємного стримера. Висока швидкість його розповсюдження до анода викликана фотоіонізацією газу квантами випромінювання, що обганяють основну лавину. Для іскрового розряду необхідні високий тиск газу, який може забезпечити необхідну інтенсивність фотоіонізуючого випромінювання, і концентрація фотоіонізованих атомів.

Коли основна лавина доходить до анода, вона дає початок позитивному стримеру. Електрони, які мають високу рухливість, виходять з лавини до анода, залишаючи стовп позитивного заряду іонів, який поступово просувається до катода, втягуючи в себе побічні лавини, утворені фотоіонізацією газу в просторі між стовпом і катодом. Цим пояснюється і

більша швидкість позитивного стримера, яку не може забезпечити тільки рух малорухливих позитивних іонів до катода. З наближенням позитивного стовпа біля катода різко зростає напруженість електричного поля і струм між катодом і позитивним стовпом збільшується як за рахунок фотоіонізації газу, так і за рахунок  $\gamma$ -процесів.

Електронний струм нейтралізує позитивний об'ємний розряд, перетворюючи його в ділянку плазми.

Коли позитивний стример доходить до катода, струм стрибком зростає, по каналу пробігає «хвиля іонізації», провідність каналу також різко збільшується. Електрони у високопровідному каналі летять з дуже великою швидкістю – до  $10^8$  м/с, а температура газу досягає  $\sim 10^4$  К. Виділення за дуже короткий проміжок часу великої енергії викликає стрибкове збільшення тиску і появу в газі ударної хвилі, що супроводжується звуковими ефектами.

Різде збільшення провідності розрядного проміжку зумовлює при потужному джерелі живлення перехід іскрового розряду в дуговий, а за малопотужного джерела – припинення розряду до тих пір, коли напруга між електродами знову не досягне пробивного значення. Ерозія електродів, що супроводжує іскровий розряд, може бути використана для обробки металів.

### **6.13. Коронний розряд**

Коронний розряд являє собою особливий вид самостійного розряду, найбільш чітко спостережуваний на електродах з малим радіусом кривизни при тисках, близьких до атмосферного. За своїм характером він дещо нагадує тліючий розряд в сильно неоднорідному електричному полі, проте має ряд особливостей. Електрична енергія перетворюється тут головним чином в теплову за рахунок передачі імпульса іонами молекулам газу. В коронному розряді мала ймовірність рекомбінації зарядів і невелика втрата на випромінювання.

Коронний заряд відрізняється іонізацією і свіченням газу в тонкому шарі, який прилягає до електроду з малим радіусом кривизни. Цей шар називається коронуючою областю, а решта проміжку до другого електрода - зовнішньою або темною областю. Зовнішня область визначає струм розряду. Напруженість поля в ній невелика і ударна іонізація практично відсутня.

З підвищенням напруги на розрядному проміжку розміри коронуючої області зростають, збільшується яскравість її свічення і струм розряду. При певній напрузі коронуюча область збільшується до розміру міжелектродного проміжку і настає іскровий пробій.

Струм коронного розряду може бути знайдений з рівняння Пуассона для зовнішньої області. Для коаксіальних електродів це дає таку формулу вольт-амперної характеристики:

$$I = \frac{2\mu V(V - V_3)}{r_g^2 \ln \frac{r_g}{r_a}}, \quad (6.49)$$

де  $\mu$  – рухливість носіїв у зовнішній області;  $V$  – напруга на розрядному проміжку;  $V_3$  – напруга запалювання коронного розряду;  $r_a$  і  $r_g$  – радіуси внутрішнього й зовнішнього електродів.

Початкова напруженість електричного поля (в кВ/м), за якої в повітрі виникає коронний розряд, визначається для коаксіальних електродів емпіричною формулою Піка:

$$\epsilon_3 = 3.1 \cdot 10^3 \delta \left( 1 + \frac{0.0308}{\sqrt{\delta r_a}} \right), \quad (6.50)$$

де  $\delta$  – відношення густини повітря до густини при  $p=1\text{ dm}$  і  $T \approx 300\text{ K}$ ;  $r_a$  – радіус коронуючого електрода, м.

Опис фізичних явищ, що протікають в коронному розряді, також зручніше виконувати на прикладі розрядного проміжка з коаксіальними електродами.

Корона називається від'ємною, коли електрод малого радіусу є катодом, і позитивною при позитивному потенціалі на коронуючому електроді. Якщо



два електроди мають малий радіус кривизни, вони обидва оточені короною – двополярний розряд. Напруженість електричного поля між коаксіальними електродами обернено пропорційна радіусу в циліндричній системі координат, таким чином, вона максимальна біля внутрішнього електрода і спадає при віддаленні від нього.

Коли внутрішній електрод є катодом, з його поверхні може бути вибитий електрон (наприклад, ударом іона або атома), який в сильному електричному полі біля катода дає початок електронній лавині. Одночасно з іонізацією виникає збудження атомів газу, тому область навколо катода є джерелом свічення.

Кванти випромінювання бомбардують катод, збільшуючи кількість електронних лавин. Є підстава вважати причиною вильоту електронів з катода також автоелектронну емісію з нерівностей поверхні.

Електричне поле спадає з віддаленням від катода, тому електрони на шляху до анода швидко втрачають швидкість. Таким чином, за межами коронуючої області виникає простір, в якому відсутні електронні лавини. Тут електрони прилипають до молекул газу і утворені від'ємні іони повільно дрейфують до анода. Струм анода обмежений від'ємним об'ємним зарядом дрейфуючих іонів. В електропозитивних газах від'ємні іони не утворюються і струм у зовнішній області електронним.

При позитивній короні, коли внутрішній електрод є анодом, випадковий електрон поблизу нього може утворити лавину. Позитивні іони доходять до катода і вибивають з нього електрони, які, в свою чергу, будуть прискорюватися до анода. Спочатку (у зовнішній області) прискорююче їх поле незначне, тому електрони рухаються з малою швидкістю і прилипають до молекул газу, утворюючи від'ємні іони. Ті поступово дрейфують до анода, в область все більших напруженостей поля, і коли відношення  $E/p$  перевищує приблизно  $70 \text{ В/(м*Па)}$ , від'ємні іони зруйнуються і відокремлені вільні електрони дадуть початок електронним лавинам в бік анода.

Описаний механізм не має особливо важливого значення для підтримання позитивної корони через віддаленість і більший радіус кривизни катода. Значно більш ймовірним процесом фотоіонізації газу випромінювання позитивної корони, є лавини, які втягуються до анода і своїм позитивним остовом нібито збільшують його розміри.

Струм розряду обмежений об'ємним зарядом іонів, дрейфуючих у зовнішній області. Зовнішня область розряду відіграє роль значного баластного опору і стабілізує коронний розряд, який може в результаті усталено протікати без обмеження зовнішнім ланцюгом. Оскільки рухливість носіїв заряду у зовнішній області вища у випадку від'ємної корони, вольт-амперна характеристика (крива 1 на рис. 6.12) йде крутіше ніж при позитивній короні (крива 2), за інших рівних умов.

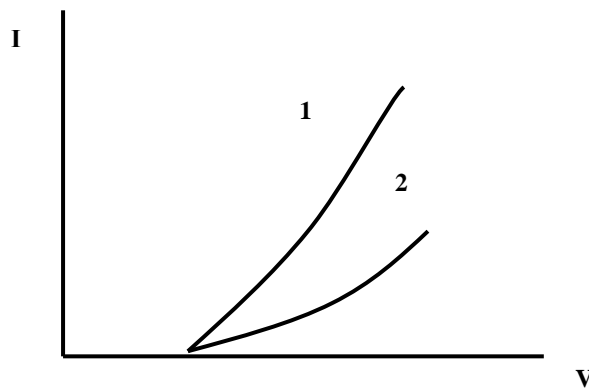


Рис. 6.12.

Струм у зовнішній області двополярного розряду складає суму струмів від'ємних і позитивних іонів.

За певних умов струм коронного розряду починає пульсувати при незмінній напругі на розрядному проміжку. Пульсування з'являється тільки за наявності в розряді домішок електровід'ємних газів. Хмара від'ємних іонів, які утворилися при від'ємній короні, обмежує струм розряду. Коли вона розсіюється, відсовується від катода, струм зростає, знову збільшуючи хмару іонів, зменшуючу струм, і т.д. У результаті в зовнішньому ланцюгу спостерігаються регулярні імпульси струму (імпульси Трігеля) з частотою

слідування, яка визначається часом розпливання хмари від'ємного об'ємного заряду. З підвищенням напруги цей час зменшується, а частота слідування імпульсів зростає. У чистих електропозитивних газах імпульси Трігеля не спостерігаються. За позитивної корони можна також помітити пульсації струму, які не мають строгої впорядкованості з часом на пов'язані з утворенням електронних лавин або стримерів.

Коронний розряд використовують в електрофільтрах, лічильниках заряджених частинок, високовольтних стабілізаторах і інших іонних приладах.

У той же час з ним пов'язані значні втрати енергії, головним чином у високовольтних лініях електропередачі.

#### **6.14. Високочастотний розряд**

Якщо подати на електроди змінну напругу, картина розряду зміниться, причому характер цієї зміни визначається частотою сигналу.

При низьких частотах розряд аналогічний розряду в постійному полі, в якому періодично змінюється положення катодних і анодних частин. Відміною є лише дещо більш високий ступінь іонізації на початку кожного півперіоду за рахунок розряду, що протікав протязі попереднього півперіоду.

Із зростанням частоти характер зміни розряду стає іншим. Починаючи з деякої критичної частоти, різні області розряду не встигають перебудовуватися протягом кожного напівперіоду і розряд стає симетричним, його неможливо розкласти в часі на два протилежно орієнтованих у просторі розряди. Критична частота, що відповідає початку переходу до високочастотного розряду, залежить від типу розряду. Для таундсендівських лавин тліючого розряду вона відповідає приблизно 10 кГц, для іскрового – 10 МГц. У дуговому розряді обидва електроди розігріваються однаково і розряд симетричний з частотою 0,1-1 кГц. З подальшим підвищенням частоти розряд незалежно від його форми проходить крізь два

характерних стани. Спочатку амплітуда зміщення важких частинок стає менше лінійних розмірів по судини і вони не бомбардують електроди. Потім, при більш високих частотах аналогічна ситуація складається для електронів і з цього моменту розряд переходить у надвисокочастотний (НВЧ) розряд. В останньому випадку позитивні іони можна вважати нерухомими і розглядати тільки коливання електронів, зводячи роль позитивних іонів до утворення поля позитивного об'ємного заряду.

Особливістю високочастотного розряду є слабка залежність більшості його типів від процесів на електродах. Розряд може протікати і тоді, коли електроди винесені за межі розрядної трубки, або при його збудженні змінним магнітним полем соленоїда, коли електроди зовсім відсутні, а розрядна трубка аналогічна вторинній обмотці трансформатора, в якій індукується струм (безелектродний розряд). Такий розряд виникає, наприклад, в плазмених установках для термоядерного синтезу типу «Токамак».

Найбільш розповсюдженим типом самостійного НВЧ-розряду є дуговий розряд, що виникає в широкому діапазоні тисків у тих частинах резонаторів і хвилеводів, де максимальна напруженість електричного поля. Зовнішньо дуговий НВЧ-розряд нагадує позитивний стовп дугового розряду при постійній напрузі і контрагує при збільшенні тиску вище  $\sim 10^3$  Па. Пояснення механізму дугового НВЧ-розряду має певні труднощі, пов'язані, зокрема, з тим, що розряд може протікати при дуже низькій напруженості електричного поля  $\sim$  порядку  $10^4$  В/м. Максимальна енергія, яку може одержати електрон в полі такої напруженості, на багато менше енергії іонізації атомів газу.

При роботі високочастотної і НВЧ-апаратури можна також спостерігати іскровий, коронуючий і факельний розряди. Високочастотна корона стає пронизаного яскравими світячими смужечками, затухаючими в далині від коронуючого електрода. Із зростанням напруги коронний розряд переходить в дуговий або іскровий залежно від потужності джерела живлення.

Факельний розряд виникає на частотах вище декількох мегагерц у точках максимальної напруженості поля за атмосферного тиску і має вигляд язика полум'я (факелу). Другим електродом тут служить земля, на яку розряд замикається ємнісним струмом.

За аналогією з розрядами на постійному струмі можна говорити про самостійний і несамостійний розряди. При великій напруженості височастотного поля газ іонізується електронами, які коливаються, в тому числі знову утвореними в результаті іонізації, виникає пробій розрядного проміжку і за час порядку  $10^{-8}/10^{-9}$  с встановлюється самостійний розряд. Напруженість поля  $E_3$ , необхідна для запалювання, як і у випадку розряду на постійному струмі, має мінімум при визначеному тиску газу (рис. 6.13).

Збільшення  $E_3$  при великих тисках пов'язано із зменшенням енергії, яку набирає електрон на довжині вільного пробігу. При малих тисках останню  $E_3$  пов'язане із підсиленням дифузійного відсторонення заряджених частинок з розряду, а також зменшенням числа іонізуючих зіткнень і ефективності прискорення електронів (за час вільного пробігу електрона поле встигає декілька разів змінити полярність).

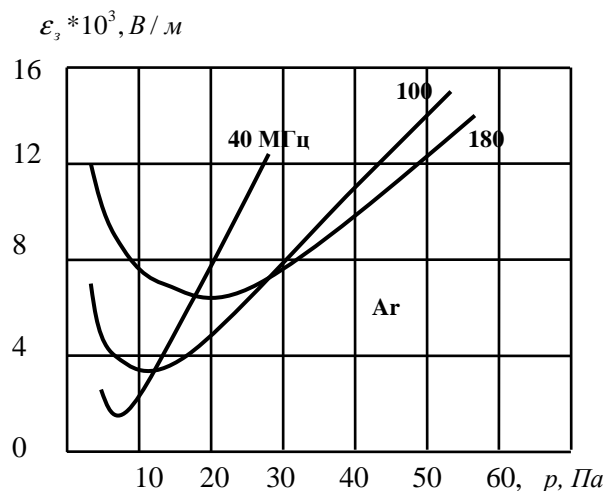


Рис. 6.13.

З цієї ж причини  $E_3$  при малих тисках зростає із збільшенням частоти поля. При більш високих тисках збільшення частоти приводить до зниження

$\mathcal{E}_3$ , так як, можливо, газ не встигає частково деіонізуватися до початку кожного наступного напівперіоду коливань.

Якщо плазма газового розряду знаходиться в постійному магнітному полі, то напруженість поля для запалювання розряду різко падає при співпаданні частоти змінного електричного поля з циклотронною частотою (за умови, що частота зіткнень електронів набагато менше частоти поля).

При низьких тисках і малих розмірах розрядного проміжку довжина вільного пробігу електронів може стати порівнюваною з розмірами судини і виникнення розряду буде зумовлене вторинною електронною емісією зі стінок. Подібний механізм виникнення розряду особливо ймовірний, коли час прольоту від стінки до стінки дорівнює напівперіоду поля (вторинно-електронний розряд).

Становить інтерес поведінка газорозрядної плазми, створеної за рахунок зовнішнього джерела іонізації або постійного електричного поля, на яку діє високочастотне електричне поле (в тому числі поле електромагнітного випромінювання). Вирішуючи рівняння руху електрона і іона в полі  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t$ , можна знайти вирази для їх швидкості, а за ними визначити придбану в полі кінетичну енергію. Якщо потім обчислити відношення максимальних енергій, одержаних електроном і іоном, то воно буде рівним оберненому відношенню їх мас. Звідси видно, що енергія, яку одержують електрони від високочастотного поля, на декілька порядків вище енергії, яку отримують позитивні іони. Те саме можна сказати і відносно амплітуд коливань електронів і іонів. Тому рухом іонів під дією ВЧ-поля можна знехтувати.

Як слідує з виразу для провідності, максимум досягається при  $\mathcal{U}_m = \omega$ , а оскільки  $\mathcal{U}_m$  (частота зіткнень) визначається тиском газу, очевидно, що залежність  $\sigma(p)$  ( $\sigma$  – провідність) представляє криву з максимумом (рис.6.14).

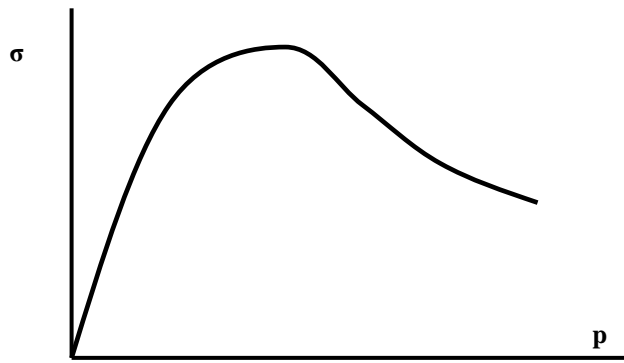


Рис. 6.14.

При  $\omega = \omega_m$  плазма найбільш ефективно відбирає енергію від НВЧ-поля і потужність, необхідна для запалювання розряду, мінімальна.

Теоретичне вивчення НВЧ-розряду повинно бути засноване на обчисленні функції розподілення електронів по швидкостям і координатам, яка дозволить записати вираз для густини струму і коефіцієнта дифузії електронів. Вирішення рівняння руху в наближенні «середнього електрона» може служити для якісних оцінок. Зокрема, воно не дозволяє вивести умови запалювання розряду. А саме швидкі електрони, енергія яких вище енергії «середнього електрона» і більше  $eV_i$ , викликають акти іонізації, і коли швидкість утворення нових електронів порівнюється зі швидкістю їх усунення з розряду, виникнуть умови для появи стаціонарного розряду.

Строгий підхід полягає в вирішенні кінетичного рівняння для електронів з метою знаходження функції розподілу, що є складним завданням.

Аналізуючи кінетичне рівняння, можна визначити, за яких умов всі члени його змінюються пропорційно, тобто не змінюється функція розподілу. Іншими словами, можна визначити умови подібності НВЧ-розрядів. Найбільш суттєвими умовами будуть

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{P_2}{P_1} = K. \quad (6.51)$$

З рівнянь електродинаміки додаються умови

$$\frac{n_{e_2}}{n_{e_1}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{j_2}{j_1} = K^2. \quad (6.52)$$

Тут  $l$  - лінійний розмір по судини;  $\rho$  - густина об'ємного заряду електронів;  $K$ - коефіцієнт пропорційності.

Інваріантами подібного перетворення для НВЧ-розряду будуть, зокрема,  $\rho l$ ,  $\varepsilon/p$ ,  $\omega/p$ ,  $j/p^2$ ,  $n_e l^2$  і т.ін.

Якщо порівняти кінетичне рівняння для НВЧ-розряду з кінетичним рівнянням для розряду в постійному полі, то виявляється, що ці рівняння стають однаковими, якщо, по-перше, дифузія в напрямку поля не впливає на функцію розподілу електронів за швидкостями (це виконується в плазмі дугового і тліючого розрядів) і, по-друге, якщо амплітуда напруженості електричного НВЧ-поля  $\mathcal{E}$  пов'язана з напруженістю постійного поля  $\mathcal{E}_{пост}$  співвідношенням

$$\mathcal{E}_{пост} = \mathcal{E} \left[ 2 \left( 1 + \frac{\omega^2}{v_m^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \mathcal{E}_{эф}. \quad (6.5)$$

Якщо знехтувати залежністю  $v_m$  від швидкості електронів, то можна вважати, що розподіл електронів за енергіями в НВЧ-розряді і в постійному полі  $\mathcal{E}_{пост} = \mathcal{E}_{эф}$  однакові при однакових зовнішніх умовах. При  $\omega \ll v_m$

$\mathcal{E}_{эф} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}}$  незалежно від того, змінюються чи ні  $v_m$  при зміні швидкості електронів.

Використання при вивченні НВЧ-розряду результатів, одержаних для розряду в постійному полі, називається методом постійно-струмової аналогії. Цей важливий метод, оскільки до цього часу накопичений багатий експериментальний результат, який стосується розряду в постійному полі. Зокрема він може бути застосований для визначення напруженості поля, при якій виникає НВЧ-розряд, тим більше що вирішення кінетичного рівняння,



особливо з урахуванням різних механізмів усунення електронів з розряду (дифузія до стінок, рекомбінація, захоплення молекулами електровід'ємних газів і т.і.) уже складне.

Відзначимо, що метод постійно-струмової аналогії визначає умову рівності тільки ізотропних складових функції розподілу і не може бути застосований для характеристик розрядів, які залежать не тільки від величини, але й від напрямку швидкості.

Коротко скажемо про виникнення розряду в оптичному діапазоні частот. Тут напруженість поля пробою дуже велика (порядку  $10^8$ - $10^9$  В/м) і необхідні особливо потужні джерела випромінювання (лазери, які працюють в режимі гігантських імпульсів з потужністю в десятки мегаватт) для здійснення оптичного пробою газу. Залежність напруженості електричного поля світлової хвилі, необхідної для оптичного пробою, від тиску газу являє собою криву з мінімумом, що лежить при тисках газу порядку декількох сотень атмосфер. Положення мінімуму, як і в НВЧ-розряді, відповідає умові  $\omega \approx \omega_m$ , коли максимальна швидкість відбору енергії електроном від поля від поля електромагнітної хвилі. Зміщення мінімуму в область великих тисків у порівнянні з НВЧ-діапазонами пов'язане із збільшенням частоти коливань.

### **6.15. Сірчана лампа**

В 1992 р. спеціалісти із Fusion System Corporation, Мериленд, США спроектували високоефективне джерело випромінювання квазісонячного спектру – безелектродний мікрохвильовий газовий розряд в тубі з сіркою. Високотужне світлове випромінювання лампи з сіркою характеризується неперервним (молекулярним) спектром близьким до спектру сонячного випромінювання, але з послабленими рівнями ультрафіолетового і інфрачервоного випромінювання. Були продемонструвані дві ефективні випромінювачі системи, які споживачів до нових, введення яких було сприйнято як найбільш значимий технологічний прорив на рубежі ХХІ

століття. Перші, випромінюючі системи на основі трубки з сіркою використовували мікрохвильове збудження з потужністю 3-4 кВт (від двох магнетронів по 1,7кВт) в смузі частот 915-2450МГц. Найвищі результати були: випромінюємий потік 480кЛм, вихідна світлова ефективність 95 лм\Вт.

Фізичний механізм роботи сірчаних ламп полягає у випромінюванні фотонів в результаті переходів між енергетичними станами випарених молекул сірки, збуджених або іонізованих мікрохвильовим розрядом в малому об'ємі, обмеженому сферичною кварцовою оболонкою.

Процес трансформації мікрохвильової енергії (енергії накачки) в оптичне випромінювання характеризується послідовністю явищ. Після включення магнетрона, як тільки амплітуда електричної компоненти мікрохвильового поля в резонаторі досягне (в зоні розташування сірчаної лампи) відповідного потенціалу запалення, мікрохвильовий розряд виникає в суміші буферного газу (аргону) і насиченого пару сірки, яка була спочатку в твердому стані. На цій стадії лампа випромінює скоріше окремі лінії спектру, які відповідають типовим енергетичним переходам в атомах аргону і сірки. При цьому представлені помітні рівні ультрафіолетового і інфрачервоного випромінювання.

В процесі поглинання мікрохвильової енергії розрядом низького тиску і із зростанням числа актів іонізації концентрація зарядів в плазмі зростає, а активність бомбардування поверхні оболонки, яка покрита осажденою сіркою в результаті попереднього включення-виключення і охолодження лампи, збільшується, головним чином, за рахунок вкладу найбільш мобільних носіїв заряду-електронів. В результаті бомбардування, температура оболонки швидко зростає, а сірка частково випаровується, зростає також і тиск. Цей процес проходить стадії топлення різних поліморфних мод сірки ( $112,8^{\circ}\text{C}$ ,  $119,3^{\circ}\text{C}$ ) і потім повну стадію випаровування (температура кипіння:  $T_{\text{boil}}=444,6^{\circ}\text{C}$ ), коли концентрація молекул сірки в оболонці стане достатньо високою. В стабільній плазмовій моді (в розряді високого тиску) спектр результуючого оптичного

випромінювання має «молекулярний» характер, як відмічено вище; мають місце переходи між множиною енергетичних рівней, включаючи обертальні і коливальні ступені свободи молекул. Спектр стає квазісуцільний. Ця властивість спектру зберігається при різних рівнях накачки мікрохвильової енергії і при різних початкових кількостях сірки в лампі даного розміру.

В зразку Fusion Lighting Inc. Company в світловій системі на основі сірки (ССС) оболонка розташована всередині камери, яка утримує мікрохвилі, але прозоре для видимого світла (див. рис. 6.15)

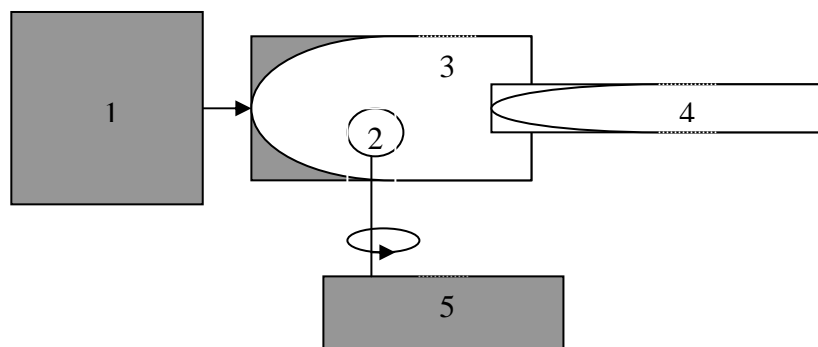


Рис. 6.15 – Основні частини мікрохвильового джерела світла.

1 – джерело живлення, мікрохвильовий генератор і узгоджувача система;

2 – кварцова оболонка з Ar-S сумішшю;

3 – мікрохвильовий резонатор разом з світловою вихідною системою;

4 – світловодні системи;

5 – системи обертання і підсиленого охолодження кварцової оболонки.

Мікрохвильова частота, яка використовується в цій лампі,  $450 \pm 50$  МГц узгоджена для використання в індустріальних, наукових і медичних цілях. Запропонований варіант дозволяє одержувати компактні світлові джерела ССС малої потужності, а не тільки кіловатного діапазону. Системи підсиленого охолодження і обертання оболонки забезпечують такий тепловий режим, за якого кварцова оболонка з Ar-Sгазовою сумішшю не руйнується. Оболонка в середині мікрохвильової камери обертається із

швидкістю 600 оборотів за хвилину. Технологічне і конструктивне рішення такого пристрою повинно забезпечувати максимальний вихід світла із резонатора при використанні мікрохвильового випромінювання безпечного рівня у відповідності з установленими державними нормами.

Резонатори виготовляють з сітки і допоміжних сітчастих екранів. Важлива частина цієї системи – параболічний рефлектор і призмений світловод. Параболічний рефлектор забезпечує для практичних цілей випромінювання в порожнинний призматичний світловод. Оболонка вставлена в резонатор, розташований в фокусі параболічного рефлектора. Система світловодів розроблена за спеціальною технологією, використовується для високоефективної передачі світла споживачам. Техніка дозволяє використовувати світловодні поверхні, які частково відбиваються, а частково пропускають світло для формування необхідного розподілу вихідної інтенсивності. Параметри світловодів наступні: матеріал – окріл; товщина стінки 3 мм; зовнішній діаметр 250мм; довжина 28м.

Такі світлові системи показують результати багаторазової економії електричної потужності і покращення рівня освітленості.

#### Список літератури

1. Райзер Ю.П. Основы современной физики газоразрядных процессов М.: Фізмат, 1980. - 414с.
2. Грановский В.Л. Электрический ток в газе.-М.; "Наука", 1971.
3. Смирнов В.Л. Физика слабоионизованного газа -М.; "Наука", 1972.
4. Фридрихов С.А., Мовнин С.М., Физические основы электронной техники М.; Высш. шк., 1982. -608с.

## Питання для самоперевірки

1. Що називається газовим розрядом?
2. Що таке пробій?
3. Що характеризує коефіцієнт перший ( $\alpha$ ), другий ( $\beta$ ), третій ( $\gamma$ ) Таусенда?
4. Що таке частота іонізації?
5. Що таке непружні зіткнення першого роду
6. Що таке непружні зіткнення другого роду?
7. Що характеризує ефективний переріз (розсіяння, передачі, імпульса).
8. Що таке прицільна відстань?
9. Що таке дебаєвський радіус?
10. Пояснити ефект Рамзауера
11. Що таке несамоствійний розряд?
12. В чому полягає режим газового підсилення?
13. Що таке самостійний розряд?
14. Що таке напруга запалювання?
15. Що характеризують криві Пашена
16. Що таке пенінгівський розряд?
17. Пояснити хід вольт-амперної характеристики електричного розряду.
18. Пояснити характерні особливості тліючого розряду.
19. Пояснити характерні особливості самостійного дугового розряду.
20. Пояснити характерні особливості несамоствійного дугового розряду.
21. Що таке плазма?
22. Пояснити механізм рекомбінаційного випромінювання плазми.
23. Що таке стример?
24. В чому полягає особливість коронного розряду?
25. В чому полягає особливість високочастотного розряду?

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

## ФІЗИЧНІ ОСНОВИ ДЖЕРЕЛ СВІТЛА

Навчальний посібник

Автор: Леонід Андрійович Назаренко

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2009, поз. 19Н

Підп. до друку 25.09.08 р.	Формат 60х84/16	Папір офісний.
Друк на ризографі	Умовн.– друк. арк. 9,0	Обл.- вид. арк. 9,5
Замовл. № 4353	Тираж 300 прим.	

---

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12

---

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ

---

61002, Харків, вул. Революції, 12